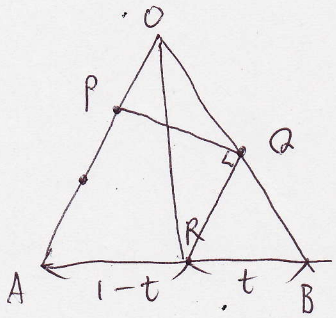
15

正三角形OABの辺OA,OB上にそれぞれ点P, Qを2OP=PA, OQ=QBとなるようにとり, また, 辺AB上に点RをAR : RB= $1-t:t$ $(0<t<1)$ となるようにとる。このとき, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる a, b を t で表わすと $a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$ である。とくに∠PQRが直角のとき, $t=\boxed{}$ となる。 〔広島工大〕



$$\overrightarrow{QR}=-\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$
$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$
$$=t\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{OB} \quad \cdots ①$$

よって $a=t,\ b=\frac{1}{2}-t$

$\angle PQR=90^\circ$

$PQ\perp QR$ … $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ とする

$\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ …②

①.②より

$$\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\left\{t\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{OB}\right\}=-\frac{1}{3}t|\overrightarrow{OA}|^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\right)|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

ここで $|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=k^2$ とし $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}k^2$ $(|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=k \quad k>0)$ とすると

$-\frac{1}{3}tk^2+\frac{1}{2}k^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}t\right)+\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{1}{2}t+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\right)k^2=0$ となり, 両辺 k^2 でわって

$$-\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}t\right)+\frac{1}{4}t+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\right)=0$$

$$-\frac{1}{3}t-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}t+\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t=0 \quad \times 12$$

$$-4t-1+2t+3t+3-6t=0$$

$$-5t+2=0$$

$$5t=2$$

$$t=\frac{2}{5}$$

$t=\frac{2}{5}$