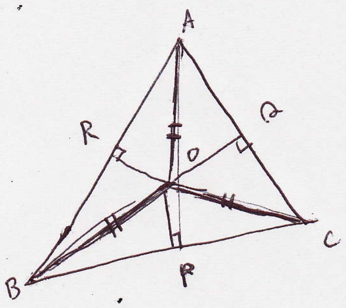
△ABC の外心 O から直線 BC, CA, AB におろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき, $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ であるという。このとき, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の関係式を求めよ。 〔京大〕




△OBC, △OCA, △OAB は
それぞれ二等辺三角形であるから
点 P, Q, R はそれぞれ辺 BC, CA, AB の
中点になる

よって

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

これらを与式に代入すると

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})+3\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\vec{0}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$

$$\frac{5}{2}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0} \quad \cdots（答）$$