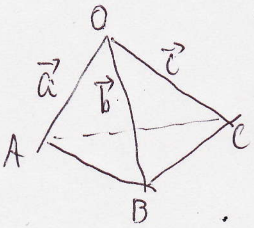
正四面体 OABC において, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は平面 ABC に垂直であることを証明せよ。(ベクトル $\overrightarrow{p}$ が, 平面 π 上の平行でなく, 零ベクトルでない 2 つのベクトルに垂直であれば $\overrightarrow{p}$ は π に垂直である。)

(2) 正四面体 OABC の各頂点から対面におろした垂線は同一の点で交わることを証明し, その交点を K として, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表わせ。

〔山口大〕

(1)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき

i) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

ii) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\overrightarrow{AC}=0$ を示すとよい

i) より $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

$= -|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ …①

ここで 正四面体の辺を k とすると

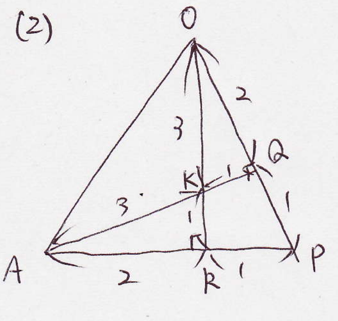
$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=k^2$　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=k\cdot k\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}k^2$ であるから ① は 0 になる

よって $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\perp\overrightarrow{AB}$ となる

ii) i)と同様にして $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\perp\overrightarrow{AC}$ となることより

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ は平面 ABC に垂直である

(2)



P を BC の中点とし点 Q, R は線分 OP, AP を 2:1 に内分する点とする. このとき $\overrightarrow{OK}$ は

$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ …①

このとき $\overrightarrow{AK}$ は

$\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}\right)=\frac{3}{4}\left(-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ …②

②のとき $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ …③ となり ①と一致するので O からの垂線 OR と A からの垂線 AQ は K で交わる 他の 2 点も含め同様な結果が得られることから 4 つの垂線は K で交わる。

$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$