$\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$ を空間におけるベクトルとする。

(1) $\vec{a}, \vec{b}$ の長さ (大きさ) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ を求めよ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 α を求めよ。ただし，$0 \leqq \alpha < \pi$ とする。

(3) 長さ 1 のベクトル $\vec{e}$ がある。$\vec{e}$ と $\vec{a}$ とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ で，$\vec{e}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\frac{\pi}{3}$ のとき，$\vec{e}$ を求めよ。

〔九州大〕

(1)

$|\vec{a}| = \sqrt{2} \qquad |\vec{b}| = 3$

(2)

$\cos\alpha = \dfrac{2+0+1}{\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$0 \leqq \alpha < \pi$ より　$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $\vec{e} = (x, y, z)$ とすると

$x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x+0+z}{1\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{x+z}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　$x+z=1$ …②

$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2x+2y+z}{1\cdot 3} = \dfrac{2x+2y+z}{3} = \dfrac{1}{2}$ より　$4x+4y+2z=3$ …③

② より　$z = 1-x$ …④

① と ③ より　$y = \dfrac{-2x+1}{4}$ …⑤

④ ⑤ を ① に代入すると

$x^2 + \left(\dfrac{-2x+1}{4}\right)^2 + (1-x)^2 = 1$

$x^2 + \dfrac{4x^2-4x+1}{16} + 1-2x+x^2=1$

$16x^2+4x^2-4x+1+16-32x+16x^2=16$

$36x^2-36x+1=0$

$x = \dfrac{18 \pm \sqrt{324-36}}{36} = \dfrac{18 \pm \sqrt{288}}{36} = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6}$

$y = \dfrac{-\dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{3} + 1}{4} = \dfrac{-3 \mp 2\sqrt{2}+3}{12} = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$z = 1 - \dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{6-3 \mp 2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{3 \mp 2\sqrt{2}}{6}$

よってもとめるベクトルは　$\left(\dfrac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6}, \mp\dfrac{\sqrt{2}}{6}, \dfrac{3 \mp 2\sqrt{2}}{6}\right)$　複号同順となる