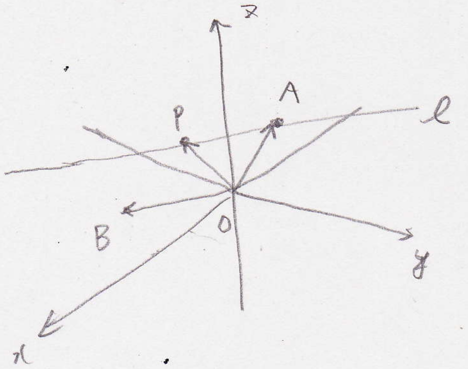
空間において, O を原点とし 2 点 A(1, 2, 3) と B(3, −2, 1) に対して, ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とを考える。このとき, A を通り $\vec{b}$ に平行な直線を ℓ とする。O から ℓ 上の点までの距離の最小値を求めよ。



$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{b}$

$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}\,t + t^2|\vec{b}|^2$

ここで

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3-4+3 = 2$ となり

$|\overrightarrow{OP}|^2 = 14 + 4t + 14t^2$ となる

これを平方完成すると

$|\overrightarrow{OP}|^2 = 14\left(t+\frac{1}{7}\right)^2 - \frac{2}{7} + 14$

$= 14\left(t+\frac{1}{7}\right)^2 + \frac{96}{7}$

よって

$t = -\frac{1}{7}$ のとき最小値 $\frac{96}{7}$ となる

よって OP の最小値は

$\sqrt{\frac{96}{7}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ より

$\frac{4\sqrt{42}}{7}$ //