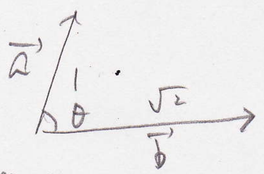
平面上に, 長さ 1 のベクトル $\vec{a}$ が与えられている。$\vec{a}$ と θ の角をなし, 長さ $\sqrt{2}$ のベクトルを $\vec{b}$ とする。

(1) 2 つのベクトル $t\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}-t\vec{b}$ (t は実数) が直交するとき, t と θ の関係を求めよ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, (1) の関係式をみたす t の範囲を求めよ。

〔香川大〕

(1)



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot\sqrt{2}\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{2}\cos\theta$ …①

条件より

$(t\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-t\vec{b})=0$

$t|\vec{a}|^2 - t^2\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

①と題意より

$t - \sqrt{2}t^2\cos\theta - \sqrt{2}\cos\theta + 2t = 0$

$\sqrt{2}\cos\theta(t^2+1) = 3t$ より $\cos\theta = \dfrac{3t}{\sqrt{2}(t^2+1)}$ //

(2)

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ (1)より

$0 \leqq \dfrac{3t}{\sqrt{2}(t^2+1)} \leqq 1$ $\quad 0 \leqq 3t \leqq \sqrt{2}(t^2+1)$

$0 \leqq 3t$ より $t \geqq 0$ …①

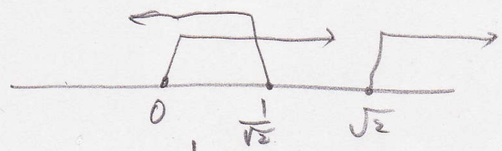
$3t \leqq \sqrt{2}(t^2+1)$ より

$\sqrt{2}t^2 - 3t + \sqrt{2} \geqq 0$

$(t-\sqrt{2})(\sqrt{2}t-1) \geqq 0$

$t \geqq \sqrt{2}$ $\quad t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …②

①、②より



(答) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $t \geqq \sqrt{2}$