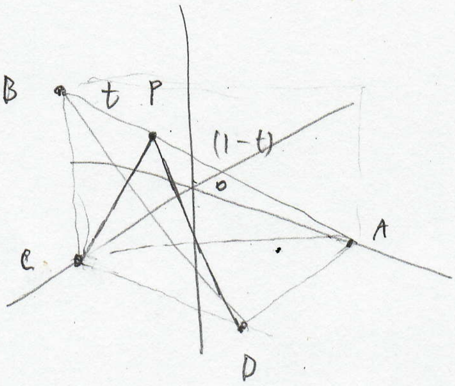
ベクトル 27

空間に 4 点 A(0, 4, 0), B(3, 0, 4), C(3, 0, 0), D(3, 4, 0) をとり, 線分 AB 上の点 P に対して三角形 △PCD の面積を S とおく。点 P が線分 AB 上を動くとき, S が最小になるのは, P の x 座標が $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ のときで, このとき $S=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である。また S の最大値は $\boxed{}$ である。ただし分数はすべて既約分数とする。〔青山学院大〕



$\overrightarrow{CB}=(0,0,4)$　　$\overrightarrow{CD}=(0,4,0)$

$\overrightarrow{CA}=(-3,4,0)$

$\overrightarrow{CP}=t\overrightarrow{CA}+(1-t)\overrightarrow{CB}$

$=(-3t,4t,0)+(0,0,4(1-t))$

$=(-3t,4t,4(1-t))$

$\triangle PCD=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CP}|^2|\overrightarrow{CD}|^2-(\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CD})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\{9t^2+16t^2+16(1-t)^2\}\cdot 16-(16t)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{16(41t^2-32t+16)-256t^2}$

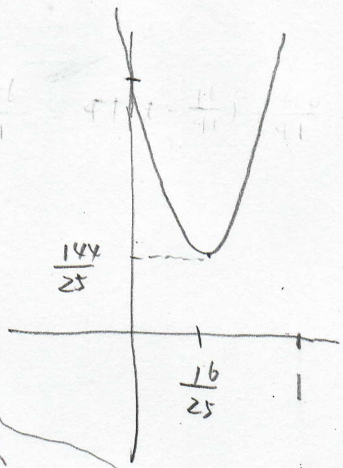
$=\frac{1}{2}\sqrt{16(25t^2-32t+16)}$

$=2\sqrt{25\left(t-\frac{16}{25}\right)^2-\frac{256}{25}+\frac{400}{25}}$

$=2\sqrt{25\left(t-\frac{16}{25}\right)+\frac{144}{25}}$　∴ $t=\frac{16}{25}$ で最小

このとき $\overrightarrow{CP}$ の x 成分は $-\frac{48}{25}$ であるから P の x 座標は $-\frac{48}{25}+3=\frac{27}{25}$

∴ $\frac{27}{25}$ のとき 最小値 $\frac{24}{5}$



$0\leqq t\leqq 1$ より $t=1$ で最大

$0\leqq t\leqq 1$ より 右上のグラフから

$t=1$ のとき最大

$\frac{1}{2}\times 16=8$

添削

$\overrightarrow{OP}$ を求めてからやった方がよさそうかな？