ベクトル 28

xyz 空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(2, 3, 0) をとる。また, 点 D を通り, z 軸に平行な直線を l とする。

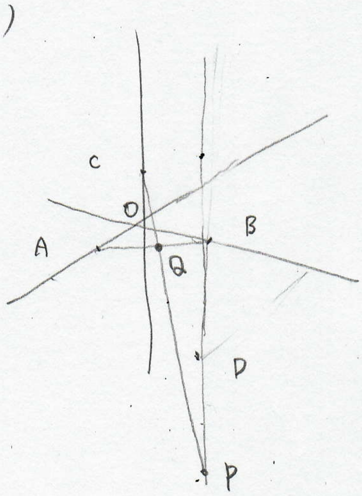
(1) l 上の点 P を, 直線 AB と直線 CP が交わるようにとる。このとき, P の座標を求めよ。

(2) 直線 AB と直線 CP のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 4 点 A, B, C, P を頂点とする四角形の面積を求めよ。

〔青山学院大〕

(1)



P(2, 3, z) とおける

$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OC} + t\,\overrightarrow{OP}$

$= (0, 0, 1-t) + (2t, 3t, zt)$

$= (2t, 3t, 1+(z-1)t)$ …①

また $\overrightarrow{OQ} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{OB}$

$= (1-s, 0, 0) + (0, s, 0)$

$= (1-s, s, 0)$ …②

①,②が等しいから $\begin{cases} 1-s = 2t \\ s = 3t \end{cases}$ $t = \frac{1}{5}$, $s = \frac{3}{5}$

$\frac{1}{5}(z-1)+1=0$

$z-1+5=0$

$z=-4$

∴ P(2, 3, −4)

(2) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ $\overrightarrow{CP} = (2, 3, -5)$ $|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{38}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CP}|} = \frac{-1\cdot 2+1\cdot 3+0\cdot(-5)}{\sqrt{2}\sqrt{38}} = \frac{1}{2\sqrt{19}}$$

(3) 四角形ABCD = △ABC + △ABP

$\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{CB} = (0, 1, -1)$ $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{2}$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2 - (-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{AP} = (1, 3, -4)$ $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{BP} = (2, 2, -4)$ $|\overrightarrow{BP}| = 2\sqrt{6}$

$$\triangle ABP = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{BP}|^2 - (\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{26})^2(2\sqrt{6})^2 - (2+6+16)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{624-576}$$

$$= 2\sqrt{3} \quad \cdots ②$$

①,②より

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}$$