ベクトル29

空間内に4点

$$A(3,\ 0,\ 4),\ B(-3,\ 0,\ -4),\ C(0,\ 10,\ 0),\ D(-8,\ 5,\ 6)$$

をとる。

(1) △ABCの面積は $\boxed{}$ である。

(2) 点Dから△ABCを含む平面に引いた垂線と，この平面との交点をHとする。Hの座標は ($\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$) である。

(3) 四面体の体積は $\boxed{}$ である。

〔明治大〕

(1)

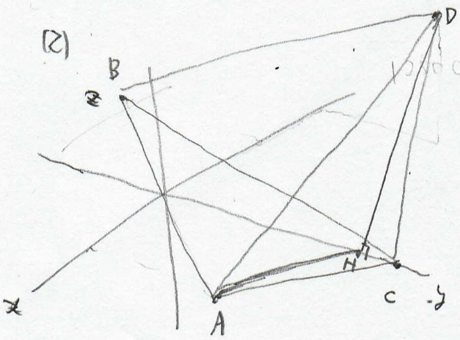
$\overrightarrow{AB}=(-6,0,-8)$ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36+64}=10$

$\overrightarrow{AC}=(-3,10,-4)$ $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+100+16}=5\sqrt{5}$ $\overrightarrow{AD}=(-11,5,2)$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{100\cdot125-(18+32)^2}=\frac{1}{2}\cdot100=50$

(2)



$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおいて $\overrightarrow{DH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ …①

①と $\overrightarrow{AB}$ は垂直であるから $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$100s+50t-50=0 \longrightarrow 2s+t-1=0$ …②

①と $\overrightarrow{AC}$ も垂直なので $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$50s+125t-75=0 \longrightarrow 2s+5t-3=0$ …③

②③を解いて $s=\frac{1}{4},\ t=\frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{DH}=\frac{1}{4}(-6,0,-8)+\frac{1}{2}(-3,10,-4)-(-11,5,2)$

$=(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+11,\ 0+5-5,\ -2-2-2)=(8,0,-6)$

$H(a,b,c)$ とおくと $\overrightarrow{DH}=(a+8,b-5,c-6)=(8,0,-6)$ より $a=0,\ b=5,\ c=0$

$\therefore H(0,5,0)$ //

(3) $|\overrightarrow{DH}|$ が高さなので $|\overrightarrow{DH}|=\sqrt{64+36}=10$

$\therefore$ 体積は $\frac{1}{3}\cdot$△ABCの面積$\cdot|\overrightarrow{DH}|=\frac{1}{3}\cdot50\cdot10=\frac{500}{3}$ //