正四面体 OABC において

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=5,\ \mathrm{OC}=6,\ \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=7$$

であるとする。また，頂点 O から平面 ABC におろした垂線の足を H とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{イ}$ である。

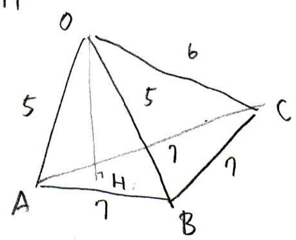
(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表わせば

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\boxed{ウ}}{49}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{エ}}{49}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\boxed{オ}}{49}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。

(3) 正四面体 OABC の体積は $\dfrac{7\sqrt{\boxed{カ}}}{2}$ である。

〔早稲田大〕

(1)



$49=25+25-2\cdot5\cdot5\cos\theta$

$50\cos\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{50}$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5\cdot5\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{2}$ ア

$49=25+36-2\cdot5\cdot6\cos\theta$

$60\cos\theta=12$

$\cos\theta=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=5\cdot6\cdot\frac{1}{5}=6$ イ

$49=25+36-2\cdot5\cdot6\cdot\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{5}\ \rightarrow\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=5\cdot6\cdot\frac{1}{5}=6$

(2) $\overrightarrow{OH}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$ とおく

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より $(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=a\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-a|\overrightarrow{OA}|^2+b|\overrightarrow{OB}|^2-b\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-c\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1}{2}a-25a+25b-\frac{1}{2}b+6c-6c$

$=-\frac{49}{2}a+\frac{49}{2}b=0$ より $a=b$ …①

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より $(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=a\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-a|\overrightarrow{OA}|^2+b\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-b\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+c|\overrightarrow{OC}|^2-c\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=6a-25a+6b-\frac{1}{2}b+36c-6c$

$=-19a+\frac{11}{2}b+30c=0$ …②

$a+b+c=1$ …③ ①.②.③より $\begin{cases}2a+c=1\\-9a+20c=0\end{cases}$ $\quad a=\frac{20}{49}\quad c=\frac{9}{49}\quad b=\frac{20}{49}$

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=\frac{20}{49}\overrightarrow{OA}+\frac{20}{49}\overrightarrow{OB}+\frac{9}{49}\overrightarrow{OC}$ ウエオ

(3) $|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{49}\sqrt{400|\overrightarrow{OA}|^2+400|\overrightarrow{OB}|^2+81|\overrightarrow{OC}|^2+800\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+360\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+360\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}$

$=\frac{1}{49}\sqrt{400\cdot25+400\cdot25+81\cdot36+400+360\cdot6+360\cdot6}=\frac{1}{49}\sqrt{27636}=\frac{14}{49}\sqrt{141}$

△ABC は正三角形 より $7\times\frac{7\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$

∴ 四面体の体積は $\frac{49\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{14}{49}\sqrt{141}\cdot\frac{1}{3}$

$=\frac{7}{6}\sqrt{423}=\frac{7}{2}\sqrt{47}$ カ