べっさん 31

次の空欄にあてはまる数値または式を書きなさい。

$\triangle$OAB において考える。辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C, 辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D とする。線分 AD と線分 BC との交点を P とし, AP : PD$=t:1-t(0<t<1)$, BP : PC $=1-s:s(0<s<1)$, とする。また
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\vec{b},t,s$ を使って 2 通りに表わすと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+\boxed{\text{ア}}\,\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{\text{イ}}\,\vec{a}+s\vec{b}$$

となる。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく平行でないから $\begin{cases}1-t=\boxed{\text{イ}}\\ \boxed{\text{ア}}=s\end{cases}$ が成立する。これを解いて, $t=\boxed{\text{ウ}}$, $s=\boxed{\text{エ}}$ である。

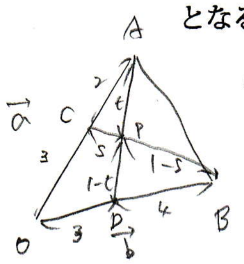
△OPA

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{\text{オ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$ と表わされる。$\triangle$OP, $\triangle$PDB の面積をそれぞれ $S_1:S_2$ とするとき, $\triangle$OAB の面積を S とすると

$$S_1=\boxed{\text{キ}}\,S,\quad S_2=\boxed{\text{ク}}\times\frac{6}{13}S=\boxed{\text{ケ}}\,S$$

となる。よって, $S_1:S_2=\boxed{\text{コ}}$ (コは最も簡単な自然数の比で答えよ。)

〔早稲田大〕



内分点の公式より

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{7}t\vec{b}$ (ア)

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ (イ)

$\begin{cases}1-t=\frac{3}{5}(1-s)\\ \frac{3}{7}t=s\end{cases}$

$1-t=\frac{3}{5}(1-\frac{3}{7}t)\times 35$

$35-35t=21(1-\frac{3}{7}t)$

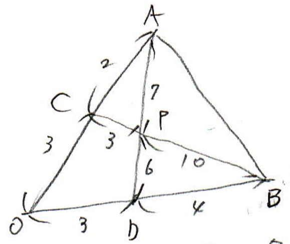
$35-35t=21-9t$

$26t=14$

$t=\frac{7}{13}$ (ウ) $\therefore s=\frac{3}{13}$ (エ)

$\overrightarrow{OP}=(1-\frac{7}{13})\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$ (オ) (カ)



S_1 $\triangle OPA=\frac{3}{7}\times\frac{7}{13}\times S=\frac{3}{13}S$

S_2 $\triangle PDB=\frac{3}{\cancel{5}}\times\frac{4\times\cancel{10}^{2}}{7\times 13}\times S$

$=\frac{4}{7}\times\frac{6}{13}S$ (ク)

$=\frac{24}{91}S$ (ケ)

$\therefore S_1:S_2=\frac{3}{13}S:\frac{24}{91}S$

$=7:8$ (コ)