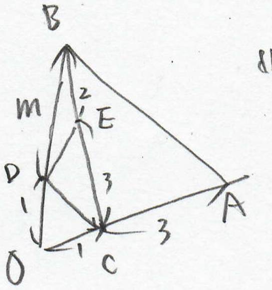
平面上の3点O, A, Bは同一直線状にないものとし,
線分OAを1：3の比に内分する点をC,
線分OBを1：$m$の比に内分する点をD,
線分BCを2：3の比に内分する点をE
とする。ただし, $m$は正の数とする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{DC}$および$\overrightarrow{DE}$を$m$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$を用いて表わせ。

(2) $|\overrightarrow{OA}| = 4|\overrightarrow{OB}|$かつ$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BC}$であるとき, $m$の値を求めよ。

〔室蘭工大〕




(1) $\overrightarrow{CD} = \dfrac{m}{m+1}\overrightarrow{CO} + \dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{DC} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{m+1}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{m+1}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{m}{m+1}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{m+1}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{3m-2}{5(m+1)}\overrightarrow{OB}$$

(2)

DE ⊥ BC より 内積 0

$$\left(\frac{1}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{3m-2}{5(m+1)}\overrightarrow{OB}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \frac{1}{40}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{10}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{3m-2}{20(m+1)}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \frac{3m-2}{5(m+1)}|\overrightarrow{OB}|^2 \cdots ①$$

$|\overrightarrow{OA}|^2 = 16|\overrightarrow{OB}|^2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 4|\overrightarrow{OB}|^2\cos\theta$ として①を書きかえると

$$= \frac{2}{5}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{2}{5}|\overrightarrow{OB}|^2\cos\theta + \frac{3m-2}{5(m+1)}|\overrightarrow{OB}|^2\cos\theta - \frac{3m-2}{5(m+1)}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$= \left\{\frac{-m+4+(m-4)\cos\theta}{5(m+1)}\right\}|\overrightarrow{OB}|^2 = \left\{\frac{(m-4)(\cos\theta-1)}{5(m+1)}\right\}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$\cos\theta \neq 1$ より　$m=4$