



へんしん



xyz 空間における原点Oと3点A(1, 2, 3), B(1, 1, -1), P(2, 2, 2)について、次の問に答えよ。

(1) \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} のなす角を求めよ。

(2) \overrightarrow{OA} 及び \overrightarrow{OB} に垂直で大きさ1の全てのベクトルを成分で表わせ。

(3) \overrightarrow{OA} と平行なベクトル \vec{a} , \overrightarrow{OB} と平行なベクトル \vec{b} , \overrightarrow{OA} 及び \overrightarrow{OB} に垂直なベクトル \vec{c} が $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ を満たすとする。このとき、ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を成分で表わせ。

(4) 四面体OABPの体積を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\cos \theta = 0 \text{ で } 90^\circ$$

〔岩手大〕

(2) 求めるベクトルの成分とP(x, y, z)とさせよ。

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP} \text{ すなはち } x + 2y + 3z = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OP} \text{ すなはち } x + y - z = 0 \quad \cdots (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots (3)$$

$$(1) + (3) \times 3 \text{ すなはち }$$

$$4x + 5y = 0 \quad (1) - (2) \times 2$$

$$-x + 5z = 0$$

$$y = -\frac{4}{5}x$$

$$z = \frac{1}{5}x \text{ すなはち (3) に代入}$$

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{16}{25}x^2 + \frac{1}{25}x^2 &= 1 \\ \frac{42}{25}x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{25}{42} \\ x &= \pm \frac{5}{\sqrt{42}} \end{aligned}$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{42}}(5, -4, 1) \text{ 複号同順}$$

(3)

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3), \overrightarrow{OB} = (1, 1, -1), \overrightarrow{OC} = (5, -4, 1), \overrightarrow{OP} = (2, 2, 2)$$

$$\vec{a} = k \overrightarrow{OA}, \vec{b} = l \overrightarrow{OB}, \vec{c} = m \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ すなはち } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{OA} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{OA} \cdot \vec{c} = k |\overrightarrow{OA}|^2 \text{ すなはち}$$

$$12 = 14k \quad k = \frac{6}{7} \quad \vec{a} = \frac{6}{7}(1, 2, 3)$$

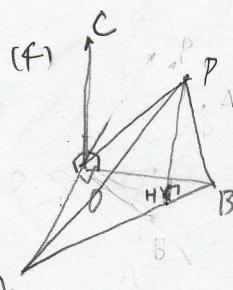
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{OB} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{OB} \cdot \vec{c} = l |\overrightarrow{OB}|^2 \text{ すなはち}$$

$$2 = 3l \quad l = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{OC} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{OC} \cdot \vec{c} = m |\overrightarrow{OC}|^2 \text{ すなはち}$$

$$4 = 42m \quad m = \frac{2}{21}$$

$$\vec{c} = \frac{2}{21}(5, -4, 1)$$



$$\overrightarrow{PH} \parallel \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{PH} = -\frac{2}{21} \overrightarrow{OC} \quad \therefore \overrightarrow{PH} = \frac{2}{21} \sqrt{42}$$

向量同順

1

数楽 <http://www.mathtext.info/>

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{14}, |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{31} \text{ すなはち 求める体積は}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{31} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{21} \sqrt{42} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$