ごうかく!

O を原点とする空間の 3 点 A(1, 1, 1), B(1, 2, 0), C(0, 0, 1) がある。
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}$ を満たす点を D とする。ただし, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表わす。

(1) 点 D の座標を求めよ。

(2) 2 つの実数 s と t に対して, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす点を P とする。t を固定して考えたとき, $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s を t を用いて表わせ。

(3) $|\overrightarrow{CP}|$ を最小にする s と t の値を求めよ。

(4) (3) で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。s_0 と t_0 に対し, P_0 を $\overrightarrow{OP_0} = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする。
$\overrightarrow{OP_0} = \left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\dfrac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2}\right)\overrightarrow{OD}$ となることを示せ。

〔神戸大〕

(1) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3}$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1+2 = 3$ より $\overrightarrow{OD} = (1,2,0) - 1\cdot(1,1,1) = (0,1,-1)$

D(0, 1, −1)

(2)
$\overrightarrow{OP} = (s,s,s) + (t,2t,0) = (s+t,\ s+2t,\ s)$
$\overrightarrow{CP} = (s+t,\ s+2t,\ s-1)$
$|\overrightarrow{CP}|^2 = (s+t)^2 + (s+2t)^2 + (s-1)^2 = 3s^2 + (6t-2)s + 5t^2 + 1 = 3\left(s^2 + \dfrac{6t-2}{3}s\right) + 5t^2 + 1$
$= 3\left(s + \dfrac{3t-1}{3}\right)^2 - \dfrac{(3t-1)^2}{3} + 5t^2 + 1 = 3\left(s + \dfrac{3t-1}{3}\right)^2 + \dfrac{6t^2+6t+2}{3}$ …①

∴ $s = \dfrac{-3t+1}{3}$

(3) (2) の① は
$|\overrightarrow{CP}|^2 = 3\left(s + \dfrac{3t-1}{3}\right)^2 + 2\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{6}$ と変形できるので
$s = \dfrac{-3t+1}{3}$, $t = -\dfrac{1}{2}$ のとき最小となる このとき $s = \dfrac{\frac{3}{2}+1}{3} = \dfrac{5}{6}$

∴ $s = \dfrac{5}{6}$ $t = -\dfrac{1}{2}$

(4) $\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{5}{6}(1,1,1) - \dfrac{1}{2}(1,2,0) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 1$ $|\overrightarrow{OA}|^2 = 3$
$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC} = -1$ $|\overrightarrow{OD}|^2 = 2$ より
また
$\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{1}{3}(1,1,1) - \dfrac{1}{2}(0,1,-1) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$ であるから 題意は示された。

ごうかく!