OA=3, OB=2, $\angle AOB = 60^\circ$ の $\triangle OAB$ において, 辺 AB を 3 : 1 に内分する点を P, 辺 OB の中点を Q, OP と AQ の交点を R とする。

(1) $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表わしなさい。

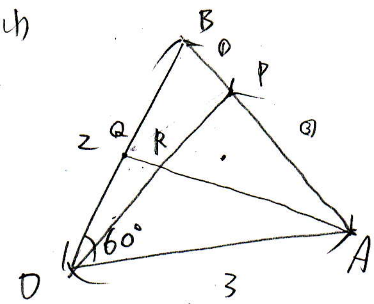
(2) 線分 PQ の長さを求めなさい。

(3) OR : RP を求めなさい。

(4) $\triangle PQR$ の面積を求めなさい。

〔大分大〕

(1)




$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BQ} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$

$= -\frac{3}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ //

(2)

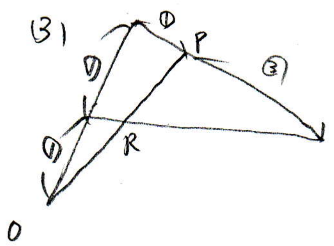
$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{8}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{16}|\overrightarrow{OB}|^2$

$= \frac{9}{16} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{19}{16}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ = 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 3$

$\therefore PQ = \frac{\sqrt{19}}{4}$ //

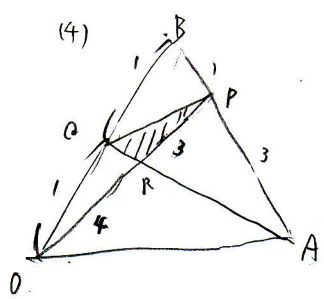
(3)




$\frac{OR}{RP} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{1} = 1$　メネラウスの定理より

$\therefore \frac{OR}{RP} = \frac{4}{3}$　$\therefore OR : RP = 4 : 3$ //

(4)




$\triangle PQR = \frac{1}{4}\triangle OAB \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$

$= \frac{3}{56}\triangle OAB$

$= \frac{3}{56}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60^\circ$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \triangle PQR$ の面積は $\frac{9\sqrt{3}}{112}$ //