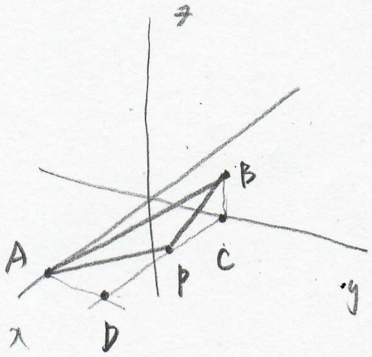
ベクトル37

座標空間内に 4 点 A(3, 0, 0), B(0, 2, 1), C(0, 2, 0), D(3, 2, 0) を考え, 線分 CD 上の点 P(x, 2, 0) に対して, 三角形 PAB の面積を S とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\angle \mathrm{APB} = \theta$ とするとき, $\cos\theta$ を x で表わせ。

(2) S の最小値を求めよ。

〔熊本大〕



$\overrightarrow{PA} = (3-x, -2, 0)$　　∴ $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(3-x)^2+4} = \sqrt{x^2-6x+13}$

$\overrightarrow{PB} = (-x, 0, 1)$　　$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{x^2+1}$

∴ $\cos\theta = \dfrac{-x(3-x)}{\sqrt{x^2-6x+13}\sqrt{x^2+1}}$

$$\cos\theta = \frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2-6x+13}\sqrt{x^2+1}}$$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2|\overrightarrow{PB}|^2 - (\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-6x+13)(x^2+1) - (x^2-3x)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{x^4} + x^2 - \cancel{6x^3} - 6x + 13x^2 + 13 - \cancel{x^4} + \cancel{6x^3} - 9x^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5x^2-6x+13}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{5} + 13} = \frac{1}{2}\sqrt{5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}}$

∴ $\sqrt{\ }$ の中の最小値は $x = \frac{3}{5}$ のときで その値は $\frac{56}{5}$

∴ S の最小値は $x = \frac{3}{5}$ のときで $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{56}{5}} = \sqrt{\frac{14}{5}} = \frac{\sqrt{70}}{5}$