四面体 OABC において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき, 辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P, 辺 AB を 2 : 1 に内分する点を Q, 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を R, 辺 OC を 1 : 2 に内分する点を S とする。このとき, 次の問いに答えよ。

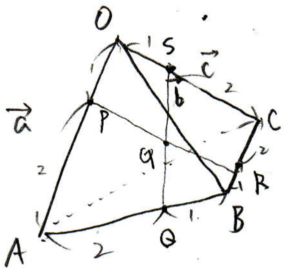
(1) 図形 PQRS が平行四辺形であることを示せ。

(2) 線分 PR と線分 QS との交点を G とする。このとき, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{OG}$ を表わせ。

(3) 辺 AC を 1 : 1 に内分する点を T, 辺 OB を 1 : 1 に内分する点を U, 線分 TU を 2 : 1 に内分する点を V とする。$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{OV}$ を表わし, 点 G と点 V は一致することを示せ。~~四面体 PABC の体積が 5 となるとき, P の座標を求め~~よ。

〔岩手大〕

(1)



△APQ∽△AOB と △CSR∽△COB を用いる

$\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\vec{b}$ で $\overrightarrow{SR} = \frac{2}{3}\vec{b}$

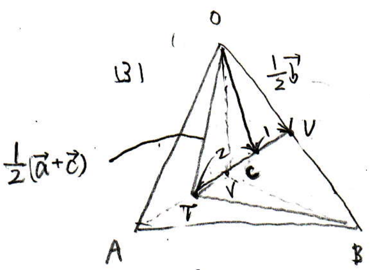
従って 1組の向かい合う辺が等しくて平行なので
四角形 PQRS が平行四辺形である.

(2)

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$$
$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$\underline{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}}$$

(3)



$$\overrightarrow{OV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OT} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OU}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$
$$= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

これは(2)と一致する