



単位ベクトル \vec{a}, \vec{b} に対して, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ とおく。 \vec{a}, \vec{b} のつくる角と \vec{c}, \vec{d} のつくる角がともに θ であるとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。 [群馬大]

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 1 + 4\cos \theta + 4 \\ &= 5 + 4\cos \theta \quad \text{∴} |\vec{c}| = \sqrt{5 + 4\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 5 - 4\cos \theta \quad \text{∴} |\vec{d}| = \sqrt{5 - 4\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{-3}{\sqrt{25 - 16\cos^2 \theta}}$$

両辺2乗して

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25 - 16\cos^2 \theta} \quad \cos^2 \theta = x \text{ とおいて整理すると}$$

$$16x^2 - 25x + 9 = 0$$

$$(16x - 9)(x - 1) = 0 \quad \text{∴} \cos^2 \theta = \frac{9}{16}, 1$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{4}, \pm 1$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} < 0 \quad \text{∴} \quad \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{3}{4}, -1$$

