座標平面上に，不等式 $x^2 + y^2 \leqq 2y$ で表わされる領域 D と 2 点 A$(2, -1)$, B$(3, 1)$ がある。次の各問に答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

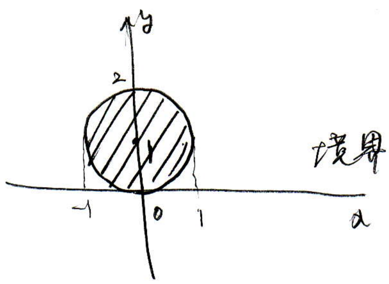
(2) 点 P が領域 D を動くとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ の内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ の最大値，最小値，およびそのときの点 P の座標を求めよ。

〔茨城大〕

(1) 与式から

$x^2 + y^2 - 2y \leqq 0$ より

$x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$



境界線は含む

(2)

領域内の座標Pは $P(r\cos\theta,\ 1 + r\sin\theta)$ と表せる $(0 \leqq r \leqq 1)$

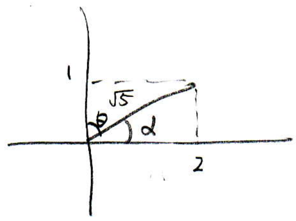
$\overrightarrow{AB} = (1, 2)$

$\overrightarrow{AP} = (r\cos\theta - 2,\ r\sin\theta + 2)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = r\cos\theta - 2 + 2r\sin\theta + 4$

$= 2r\sin\theta + r\cos\theta + 2$

$= \sqrt{5}\, r\sin(\theta + \alpha) + 2$



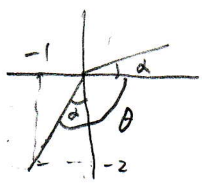
∴ 最大値は $r=1$, $\sin(\theta+\alpha) = 1$ のとき

$\sqrt{5} + 2$ で θ は右上図 ∴ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

∴ $P\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)$ のとき最大値 $\sqrt{5} + 2$

最小値は $r=1$ $\sin(\theta+\alpha) = -1$ のとき

$-\sqrt{5} + 2$ で θ は右下図



$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

∴ $P\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)$ のとき 最小値 $-\sqrt{5} + 2$