ベクトル43

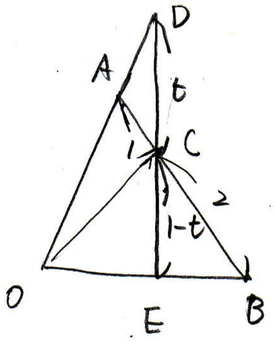
△OABにおいて, 辺ABを1 : 2に内分する点をCとし, 辺OAの延長線上に点Dをとり, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$(ただし $x > 1$) とする。2点C, Dを通る直線と辺OBが交わる点をEとする。ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし, 点Cは線分DEを $t : (1-t)$ に内分しているものとする (ただし, $0 < t < 1$)。

(1) x, y を t で表わせ。

(2) △OABの面積を1とするとき, △ODEの面積を t で表わせ。また, △ODEの面積の最小値と, そのときの t の値を求めよ。

〔東京海洋大〕

(1)



$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ …①

$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OE} + (1-t)\overrightarrow{OD}$

$= yt\overrightarrow{OB} + x(1-t)\overrightarrow{OA}$ …②

①②より

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = x(1-t)\overrightarrow{OA} + yt\overrightarrow{OB}$

係数比較して　$\frac{2}{3} = x(1-t)$, $\frac{1}{3} = yt$ であるから

$x = \frac{2}{3(1-t)}$, $y = \frac{1}{3t}$

(2)

△ODE $= xy$△OAB より

$= \frac{2}{9t(1-t)}$

ここで 分母が最大のとき 面積は最小になるので

$9t(1-t) = -9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

∴ $t = \frac{1}{2}$ のとき 最大値 $\frac{9}{4}$ をとる

従って面積の最小値は このときで

$\frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$

$t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{8}{9}$