三角形OABにおいて, 辺ABを2：1に内分する点をP, 線分OPを$k:(1-k)$に内分する点をQとし, 直線AQと直線OBの交点をRとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$として, 次の問いに答えよ。ただし, 実数$k$は$0<k<1$の範囲を動くものとする。

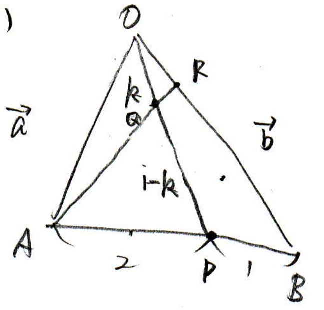
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$k$, $\vec{a}$, $\vec{b}$で表わせ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$k$, $\vec{b}$で表わせ。

(3) 直線PRが直線AOに平行になるとき, kの値を求めよ。

〔新潟大〕

(1)



$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$

$=\vec{a}+k\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AO}$

$=\vec{a}+\frac{2}{3}k(\vec{b}-\vec{a})-(1-k)\vec{a}$

$=\cancel{\vec{a}}+\frac{2}{3}k\vec{b}-\frac{2}{3}k\vec{a}-\cancel{\vec{a}}+k\vec{a}$

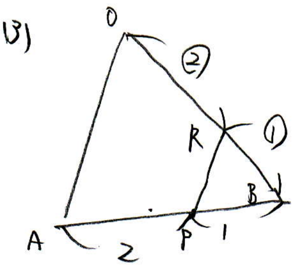
$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}$ //

(2) メネラウスの定理より

$\frac{k}{1-k}\times\frac{2}{3}\times\frac{RB}{OR}=1$ より $\frac{RB}{OR}=\frac{3(1-k)}{2k}$ $\therefore\ RB:OR=3(1-k):2k$

$\therefore\ \overrightarrow{OR}=\frac{2k}{3(1-k)+2k}\vec{b}$ 整理して $\overrightarrow{OR}=\frac{2k}{3-k}\vec{b}$ //

(3)



PR//AOより OR：RB＝2：1

∴(2)より

RB：OR＝3(1−k)：2k であるから

1：2＝3(1−k)：2k

6−6k＝2k

8k＝6

$k=\frac{3}{4}$

$k=\frac{3}{4}$ //