ごうかく!　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　ごうかく!

四面体 OABC が

$$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = p$$

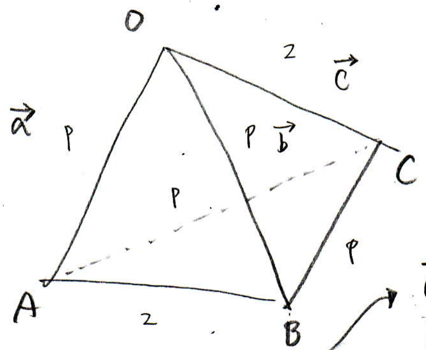
をみたすとする。ただし, $p > \sqrt{2}$ である。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき, 以下の各問いに答えよ。

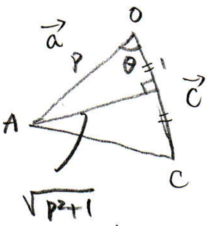
(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ および $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。また, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を p を用いて表わせ。

(2) C から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB の交点を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, p$ を用いて表わせ。

(3) H が辺 AB 上にあるような p の値を求めよ。また, このときの四面体 OABC の体積を求めよ。

〔福井大〕





$\vec{a}\cdot\vec{c} = 2\cdot p\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{p}$ より

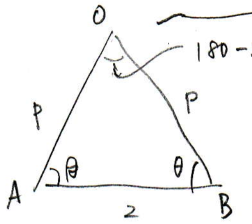
$\vec{a}\cdot\vec{c} = 2$

同様に $\vec{b}\cdot\vec{c} = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = p^2\cos(180-2\theta) = -p^2\cos2\theta = -p^2(2\cos^2\theta - 1)$

$= -p^2\left(\frac{2}{p^2} - 1\right)$

$= p^2 - 2$



(2) $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおく

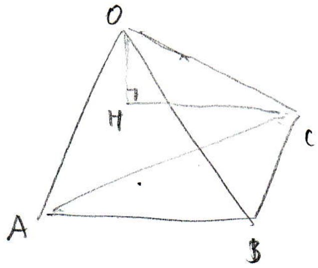
$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ より

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a} = 0$　　$s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ より

$sp^2 + t(p^2-2) - 2 = 0$ …①

$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b} = 0$　　$s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

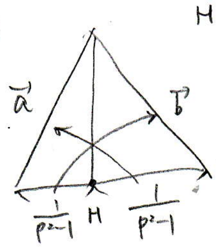
$s(p^2-2) + tp^2 - 2 = 0$ …②



①,②を解いて　$t = \frac{1}{p^2-1}$　　$s = \frac{1}{p^2-1}$

∴ $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{p^2-1}\vec{a} + \frac{1}{p^2-1}\vec{b}$

(3)

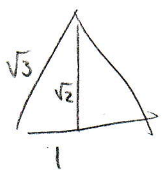


HがAB上にあることから

$\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^2-1} = 1$

$2 = p^2 - 1$　$p^2 = 3$　$p = \pm\sqrt{3}$　$p > \sqrt{2}$ より　$p = \sqrt{3}$

体積　$\triangle OAB = 2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2} = \sqrt{2}$　　$CH = OH = \sqrt{2}$



∴ 求める体積は

$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$

ごうかく!　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　ごうかく!