ごうかく!
ごうかく!

正四面体 OABC の 3 頂点 O, A, B の座標が O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 3, −3) であるとき, 以下の各問いに答えなさい。

(1) 頂点 C の座標を求めよ。ただし, C の x 座標は正とする。

(2) 2 点 P, Q がそれぞれ線分 OC, 線分 AB 上を動くとき, PQ の最小値を求めよ。

〔福井大〕

(1) $C(x, y, z)$ とおくと 正四面体なので すべての辺の長さは $\sqrt{18}$ となる

$\therefore$
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=18 & \cdots ① \\ (x-3)^2+(y-3)^2+z^2=18 & \cdots ② \\ x^2+(y-3)^2+(z+3)^2=18 & \cdots ③ \end{cases}$$

②−③より $x=-z$ である これと①より

$y^2=-2x^2+18$

これと②から $y=-x+3$

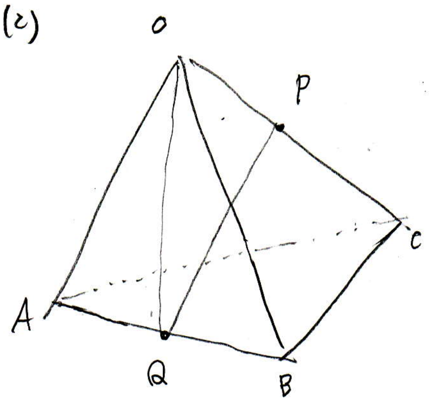
$\therefore (-x+3)^2=-2x^2+18$

$(x-3)(x+1)=0$ $x>0$ より $x=3$

$\therefore z=-3$ $y=0$

ゆえに $C(3, 0, -3)$

(2)



$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}=(3t, 0, -3t)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AB}=(-3, 0, -3$

$=(3, 3, 0)+(-3s, 0, -3s)$

$=(3-3s, 3, -3s)$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=(3t-3+3s)^2+3^2+(-3t+3s)^2$

$=18t^2-18t+18s^2-18s+18$

$=18\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+18\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+9$

$\therefore$ PQ は $t=s=\frac{1}{2}$ のとき最小でその値は 3

ごうかく!
ごうかく!