△ABCにおいて, AB=2, BC=4, CA=3とします。ベクトル$\vec{b}$, $\vec{c}$を$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$によって定めます。

(1) ベクトル$\vec{b}$と$\vec{c}$の内積は$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\square}{\square}$

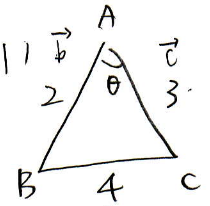
(2) 以下△ABCの内心をDとします。内心Dが∠Aの2等分線上にあることから, ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$は$\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{\square}\vec{c}$の実数倍になります。このことを用いると$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\square}{\square}\vec{b}+\dfrac{\square}{\square}\vec{c}$であることがわかります。

(3) 内心Dから辺ABに下ろした垂線の足をHとします。このとき$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{\square}{\square}\vec{b}$であることがわかります。

(4) △ABCの内接円の半径は$\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$となります。

〔慶応大〕

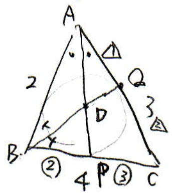
(1)



$16=4+9-2\cdot2\cdot3\cos\theta$ より $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

∴ $\vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot3\cdot-\dfrac{1}{4}$　　$\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{3}{2}}$ //

(2)



角Aの二等分線と辺BCの交点をPとするとBP：PC＝2：3より

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}=\underline{\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$ //　　sを実数とすると$\overrightarrow{AD}$は

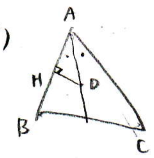
$\overrightarrow{AD}=s\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$ …① 同様にACと角Bの二等分線とACの交点をQとすると

AQ：QC＝1：2 より $\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})-\dfrac{2}{3}\vec{b}=-\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

実数tとすると $\overrightarrow{AD}=\vec{b}+t\underbrace{\left(-\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)}_{\overrightarrow{BQ}}=(1-t)\vec{b}+\dfrac{1}{3}t\vec{c}$ …②　①.②より $1-t=\dfrac{1}{2}s$, $\dfrac{1}{3}s=\dfrac{1}{3}t$

$\dfrac{3}{2}s=1$, $s=\dfrac{2}{3}$　よって $\underline{\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}}$ //

(3)



$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{9}\vec{c}$　　$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\vec{b}\left(\overrightarrow{AH}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{9}\vec{c}\right)=0$

$\vec{b}\overrightarrow{AH}-\dfrac{1}{3}|\vec{b}|^2-\dfrac{2}{9}\vec{b}\vec{c}=0$　　$\overrightarrow{AH}=k\vec{b}$ より

$k|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{3}|\vec{b}|^2-\dfrac{2}{9}\vec{b}\vec{c}=0$　(1)より　$4k-\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{9}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$　$4k=1$　$k=\dfrac{1}{4}$

∴ $\underline{\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{4}\vec{b}}$ //

(4)

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin\theta$　　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　$\sin\theta>0$

$=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

内接円の半径をrとすると

$\dfrac{1}{2}r(2+3+4)=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

$r=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

∴ $\underline{\dfrac{\sqrt{15}}{6}}$ //