O を始点とする 2 つのベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が 60° で $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

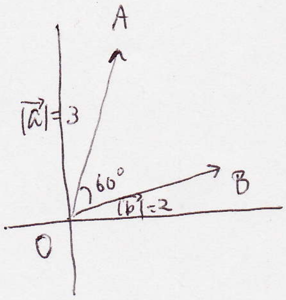
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさを求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の中点を M とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさを求めよ。

(4) O から直線 AB におりした垂線の足を H とするとき AH : HB を求めよ。

〔北海道工大〕

(1)



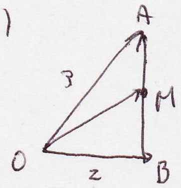
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$= 3\cdot 2\cos 60^\circ$
$= 3\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 3$

$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = 3}$

(2) 余弦定理より $AB = x$ とおくと
$x^2 = 9 + 4 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot \frac{1}{2}$
$= 13 - 6$
$= 7$　　$x > 0$ より $x = \sqrt{7}$

$\underline{\sqrt{7}}$

(3)



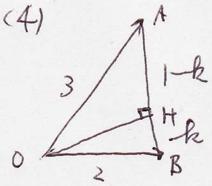
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$
$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$
$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ より

$|\overrightarrow{OM}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2)$
$= \frac{1}{4}(9 + 6 + 4)$
$= \frac{19}{4}$

よって

$\underline{\frac{\sqrt{19}}{2}}$

(4)

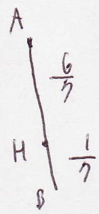


$\overrightarrow{OH} = k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\{k\vec{a} + (1-k)\vec{b}\}(\vec{b} - \vec{a})$
$= k\vec{a}\cdot\vec{b} - k|\vec{a}|^2 + (1-k)|\vec{b}|^2 - (1-k)\vec{a}\cdot\vec{b}$
$= 3k - 9k + 4(1-k) - 3(1-k)$
$= -7k + 1$

$-7k + 1 = 0$ より　$k = \frac{1}{7}$



これより $AH : HB = \frac{6}{7} : \frac{1}{7}$

よって

$\underline{AH : HB = 6 : 1}$