ベクトル51

点Oを中心とする半径1の円周上に3点A, B, Cがあり

$$\overrightarrow{OC} = (\cos\theta)\overrightarrow{OA} + (\sin\theta)\overrightarrow{OB}\ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

を満たしているものとする。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。

(2) 三角形OACの面積をθを用いて表せ。

(3) 四角形OACBの面積Sをθを用いて表せ。また, Sの最大値を求めよ。

〔北海道学園大〕

(1)

$|\overrightarrow{OC}|^2 = (\cos\theta\cdot\overrightarrow{OA} + \sin\theta\,\overrightarrow{OB})^2$

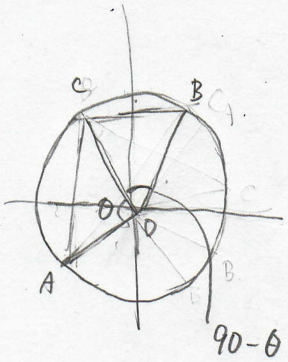
$|\overrightarrow{OC}|^2 = \cos^2\theta\,|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \sin^2\theta\,|\overrightarrow{OB}|^2$

$1 = \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \sin^2\theta$

$2\sin\theta\cos\theta\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$　ここで $0^\circ<\theta<90^\circ$ より

$2\sin\theta\cos\theta>0$　$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

(2)



求める面積をSとすると

$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$

ここで

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = (\cos\theta)|\overrightarrow{OA}|^2 + (\sin\theta)\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$= \cos\theta$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\sin\theta$

$S = \frac{1}{2}\sin\theta$

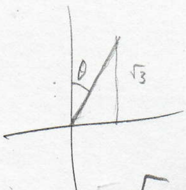
(3)

上図で $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ より $\angle AOB = 90^\circ$

(2)より $\angle AOC = \theta$ であるから $\angle BOC = 90^\circ - \theta$

よって四角形OACB $= \triangle OAC + \triangle OBC$

$= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin(90-\theta)$



$= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$

これを S_A とすると

$S_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$　最大値は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のときである

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$