ベクトル52

四面体 OABC において，OA=1，$\angle OAB = 60°$，$\angle BOA = 75°$，$\angle OAC = 30°$，$\angle COA = 60°$，$\angle BOC = 120°$ とする。
また，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の各問いに答えよ。ただし，$\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を用いてよい。

(1) 辺 OB の長さを求めよ。

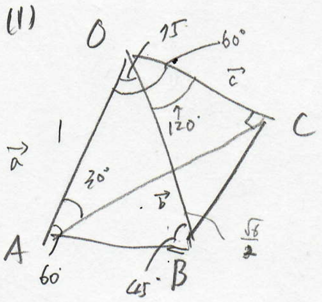
(2) 辺 BC の長さの 2 乗を求めよ。

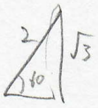
(3) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(4) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とするとき $\cos^2\theta$ の値を求めよ。

〔日本女子大〕

(1)





$$\frac{1}{\sin 45} = \frac{OB}{\sin 60}$$

$$OB = \frac{\sin 45}{\sin 60} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \quad \therefore \frac{\sqrt{6}}{2}$$

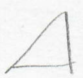
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(2) $\dfrac{OC}{\sin 30} = \dfrac{AC}{\sin 60} = \dfrac{1}{\sin 90}$ より $OC = \dfrac{1}{2}$，$AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ △OBCで余弦定理を使うと

$$BC^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 120°$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \qquad \therefore BC^2 = \frac{7+\sqrt{6}}{4}$$



(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 75° = 1\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

(4) $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ $\qquad \vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot\dfrac{1}{2}\cos 60° = \dfrac{1}{4}$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{a}(\vec{c}-\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2} = \left(\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{7+\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{4(7+\sqrt{6})}$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{7-4\sqrt{3}}{4(7+\sqrt{6})}$$