ベクトル54

座標空間に, 原点 O と点 A (2, 1, 1), B(1, 1, 3), C(3, 2, −2), D(3, 4, t) がある。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \boxed{}$ である。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるとき, $t = \boxed{}$ である。

(3) (2) のとき, 四角形 ABDC の面積は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ である。

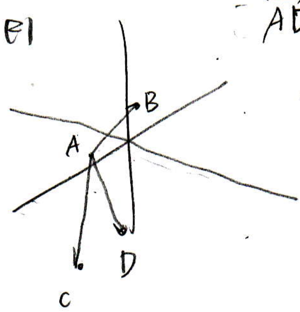
(4) (2) のとき, 四角錐 OABDC の体積は $\boxed{}$ である。

〔獨協医科大〕

(1) $\overrightarrow{OA}=(2,1,1)$ $\overrightarrow{OB}=(1,1,3)$

より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2+1+3=6$ ∴ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6$

(2)



$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ と表せる

$\overrightarrow{AB}=(-1,0,2)$ $\overrightarrow{AC}=(1,1,-3)$ $\overrightarrow{AD}=(1,3,t-1)$

これより

$$\begin{cases} -a+b=1 & \cdots ① \\ b=3 & \cdots ② \\ 2a-3b=t-1 & \cdots ③ \end{cases}$$

②より $b=3$ ①と $b=3$ より $a=2$

∴ $a=2,\ b=3$ と③より $t=-4$

(3) $\triangle ACD = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{AD}|^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11\cdot35-19^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{11}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{35}$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=19$

$\triangle ABD = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AD}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot35-(-11)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-11$

∴ 四角形ABDC $= \triangle ACD+\triangle ABD = \sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$ ∴ 四角形ABDC $=\frac{5}{2}\sqrt{6}$

(3) $\overrightarrow{OP}=(a,b,c)$ とすると $\overrightarrow{OP}\perp$ 四角形ABDCであるから $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OP}$

$$\begin{cases} -a+2c=0 \longrightarrow a=2c \\ a+b-3c=0 \\ a+3b-5c=0 \longrightarrow b=c \end{cases}$$

これより $\overrightarrow{OP}=(2c,c,c)$ $c=0$ とすると $\overrightarrow{OP}=\vec{0}$ より問題に合わない。

よって $\overrightarrow{OP}=(2,1,1)=\overrightarrow{OA}$ $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{6}$ であるから 求める体積Vは

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$

5