ベクトル55

点Oを原点とする座標平面上に△OABがある。動点Pが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

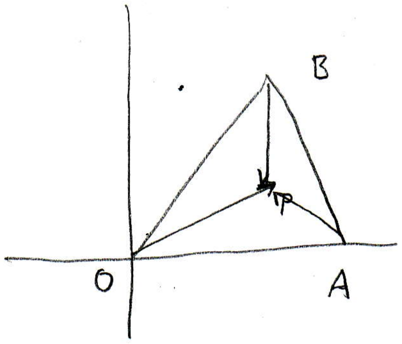
を満たしながら△OABの内部を動くとき, 次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ。

(2) 定数$k$の値の範囲を求めよ。

(3) Pの動く範囲を図示せよ。

〔名城大〕




$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$

$3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$

$3\overrightarrow{OP}=(k+1)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OP}=\dfrac{k+1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}}$

(2)

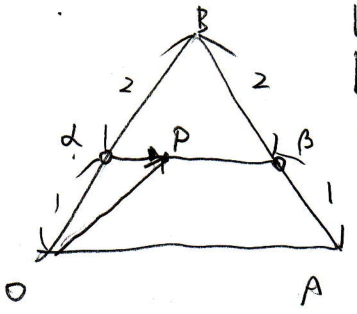
三角形の内部をPが動くことから

$\dfrac{k+1}{3}+\dfrac{1}{3}<1$ より $k+1+1<3$ $k<1$ …①

また

$\dfrac{k+1}{3}>0$ $k>-1$ …② ①,②より $\underline{-1<k<1}$

(3)




$k=-1$ なら $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ となり Pは OBを1:2に内分する. この点をαとする

$k=1$ なら $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ となり PはABを1:2に内分する この点をβとする

また(1)より $\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{k+1}{3}\overrightarrow{OA}$ となり

$\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ の表すベクトルは $\overrightarrow{OA}$ に平行である.

よって OA // αβ となる

つまり点Pは線分αβ上を動く．ただし，両端の点α,βは含まない．