ベクトル57

訂正

空間内に4点O, A, B, Cがあり, $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}|$, $\overrightarrow{OC} = 1$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = k$とする。点Aから直線OBに下ろした垂線と直線OBの交点をPとし, 点Cから直線OBに下ろした垂線と直線OBの交点をQとする。

(1) $\overrightarrow{PA} = \square\overrightarrow{OA} + \dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QC} = \dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{OB} + \square\overrightarrow{OC}$, $\dfrac{|\overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{PA}|} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$ である。

(2) $\overrightarrow{PA}$と$\overrightarrow{QC}$が直交するとき, $k = \dfrac{\square}{\square}$ である。

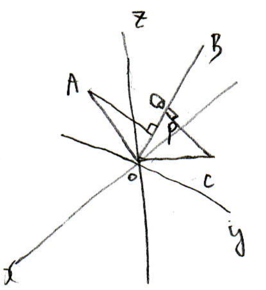
(3) 4点O, A, B, Cが同一平面上にあるとき,

$$k = \frac{\square}{\square}\left(1 \pm \sqrt{\square}\right)$$

である。

〔上智大〕

(1)



$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta = 1$
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta = \frac{1}{3}$
$\cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}$ また $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{OP}$ より $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OP} = 0$

$(\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB})\cdot t\overrightarrow{OB} = t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - t^2|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$

$= t - 2t^2 = 0$ $t(1-2t) = 0$ $t = 0, \frac{1}{2}$ $t \neq 0$ より $t = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ $|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ …①

$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OQ}$ また $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{QC} \perp \overrightarrow{OQ}$ より $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OQ} = 0$ $(\overrightarrow{OC} - s\overrightarrow{OB})\cdot s\overrightarrow{OB} = 0$

$s\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} - s^2|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$ $\frac{1}{3}s - 2s^2 = 0$ $s(1-6s) = 0$ $s = 0, \frac{1}{6}$ $s \neq 0$ より $s = \frac{1}{6}$

$\therefore$ $\overrightarrow{QC} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ $|\overrightarrow{QC}|^2 = \frac{1}{36}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{1}{18} - \frac{1}{9} + 1 = \frac{17}{18}$ …②

① より $|\overrightarrow{PA}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ② より $|\overrightarrow{QC}| = \sqrt{\frac{17}{18}}$ より $\frac{|\overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{PA}|} = \frac{\sqrt{17}}{3}$

(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QC} = 0$ $(\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB})(-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \frac{1}{12}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$= -\frac{1}{6} + k + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} + k = 0$

$\therefore$ $k = \frac{1}{6}$

(3) $\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{PA}$ とおけばよい (1) より $\frac{|\overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{PA}|} = \frac{\sqrt{17}}{3}$ であるから $|\overrightarrow{QC}| = \frac{\sqrt{17}}{3}|\overrightarrow{PA}|$ $\therefore$ $\overrightarrow{QC} = \pm\frac{\sqrt{17}}{3}\overrightarrow{PA}$

$-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \pm\frac{\sqrt{17}}{3}(\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB})$ $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} \pm \frac{\sqrt{17}}{3}(\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB})$

$k = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \pm \frac{\sqrt{17}}{3}(|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$

$= \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{17}}{3}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$

$\therefore$ $k = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{17})$