ベクトル59

1辺の長さが1である正四面体OABCについて, 次の問いに答えよ。

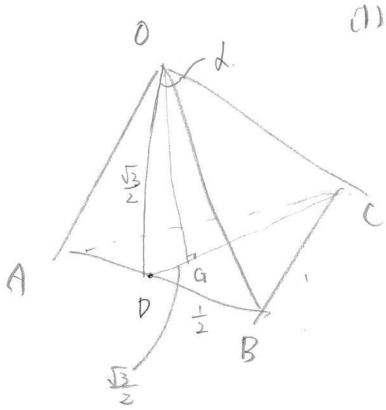
(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) ABの中点をDとし, $\angle COD = \alpha$ とするとき, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である。

(3) $\triangle ABC$ の重心をGとするとき, OGの長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である。

(4) $\triangle OGD$ の面積を $S_1$ とし. $\triangle BGC$ の面積を $S_2$ とするとき, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である。

〔東京薬科大〕




(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ$
$= 1\cdot 1\cdot \frac12 = \frac12$

(2) $\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 + 1 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha$

$\sqrt3\cos\alpha = 1$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{3}$

(3) OGの長さ点Oから△ABCへの垂線の長さ
‖
△ODCで底辺をDCとしたときの高さOG

$|\overrightarrow{OG}|^2 = \left|\frac13(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right|^2$ から…多分こっちの方がいいと思う。

$\cos\alpha = \frac{\sqrt3}{3}$ より $\sin^2\alpha = 1 - \frac13 = \frac23$ $\sin\alpha > 0$ より $\sin\alpha = \sqrt{\frac23} = \frac{\sqrt6}{3}$

∴△ODCの面積の関係より $1\cdot\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt3}{2}\cdot OG$ となり

$OG = \sin\alpha = \frac{\sqrt6}{3}$ ∴ $OG = \frac{\sqrt6}{3}$

ベクトルできちんと出した方がいいのかな?

(4)
$S_1 = \triangle OGD = \frac12\cdot 1\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt6}{3}\cdot\frac13 = \frac{\sqrt2}{12}$

$S_2 = \triangle BGC = \triangle ABC\cdot\frac12\cdot\frac23 = \frac{\sqrt3}{4}\cdot\frac13 = \frac{\sqrt3}{12}$

∴ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3} = \frac{\sqrt6}{3}$