AC=4AB で ∠A = 60° なる三角形 ABC がある。CB を 2 : 1 に内分する点を D, ∠B の 2 等分線が AC と交わる点を E とし, AD と BE との交点を F とする。点 A に関する B, C の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ として, 次のそれぞれのベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表わせ。

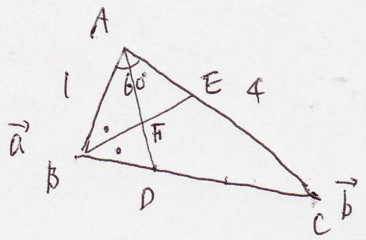
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$(ただし点 P は点 A と点 D を結ぶ直線上の動点である)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

(3) 点 F の点 A に関する位置ベクトル

〔順天堂大〕

(1)

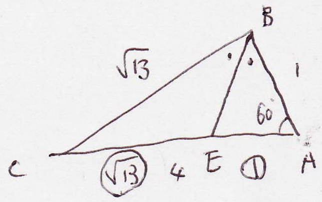


$\overrightarrow{AP}$ は $\overrightarrow{AD}$ 上にあることから

$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ より $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$ となり

$\overrightarrow{AP} = t(2\vec{a}+\vec{b})$

(2) 見やすいように上図を書きかえると



余弦定理より BC = x とおくと

$x^2 = 1+16-2\cdot4\cdot1\cos60$

$= 17-4$

$= 13$ 　　BC = √13

ここで BE は ∠CBA の二等分線であるから CE : EA = √13 : 1

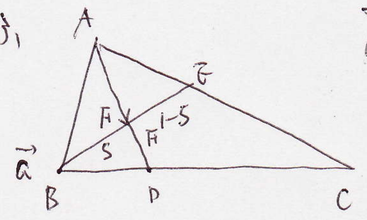
よって $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{\sqrt{13}+1}\overrightarrow{BC} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}+1}\overrightarrow{BA}$

ここで $\overrightarrow{BC} = \vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ であるから

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{\sqrt{13}+1}(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}+1}\cdot(-\vec{a})$

これより $\overrightarrow{BE} = -\vec{a} + \frac{1}{\sqrt{13}+1}\vec{b}$

(3)



$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + s\overrightarrow{BE}$

$= \vec{a} + s\left(-\vec{a} + \frac{1}{\sqrt{13}+1}\vec{b}\right)$

$= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{\sqrt{13}+1}\vec{b}$

ここで $\overrightarrow{AF} = t(2\vec{a}+\vec{b})$ ∵(1)より

であるから $\overrightarrow{AF} = 2t\vec{a} + t\vec{b}$ …①

これと係数比較すると

$$\begin{cases} 2t = 1-s \\ t = \frac{s}{\sqrt{13}+1} \end{cases}$$

$s = 1-2t$ より

$t = \frac{1-2t}{\sqrt{13}+1}$

$(\sqrt{13}+3)t = 1$

$t = \frac{1}{\sqrt{13}+3} = \frac{\sqrt{13}-3}{4}$

これを①に代入して

$\overrightarrow{AF} = \frac{\sqrt{13}-3}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{13}-3}{4}\vec{b}$