ベクトル66

空間のベクトル $\overrightarrow{a}=(3,1,2)$, $\overrightarrow{b}=(x,y,3)$ について, 次の問いに答えよ。ただし, x, y は実数とする。

(1) x, y が $x^2+y^2=5$ を満たし, ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角が 60° となるとき, x, y の値を求めよ。

(2) x, y が $x^2+y^2 \leqq 5$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ を満たすとき, 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の最大値と最小値を求めよ。

〔東邦大〕

(1)
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$ より

$3x+y+6=\sqrt{14}\cdot\sqrt{x^2+y^2+9}\cdot\frac{1}{2}$

$3x+y+6=7$

$3x+y=1 \longrightarrow y=1-3x$ これと $x^2+y^2=5$ より

$x^2+(1-3x)^2=5$

$10x^2-6x-4=0$

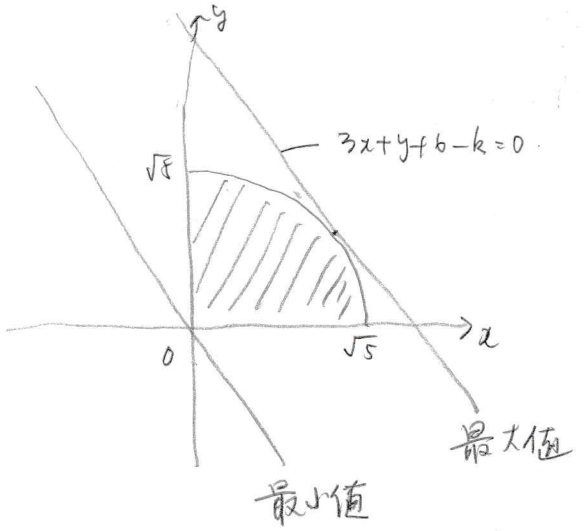
$5x^2-3x-2=0$

$(x-1)(5x+2)=0$

答 $\begin{cases} x=1 \text{ のとき } & y=-2 \\ x=-\frac{2}{5} \text{ のとき } & y=\frac{11}{5} \end{cases}$

(2)
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3x+y+6$ であり $3x+y+6=k$ とおくと

$y=-3x+k-6$ と円 $x^2+y^2\leqq 5$ $x\geqq 0$ $y\geqq 0$ を考えるとき 題意の円は



左図の斜線部, 境界線を含み.

直線 $3x+y+6-k=0$ の最大値は

左図のように円に接するときで円の中心と

距離の関係から

$\frac{|6-k|}{\sqrt{9+1}}=\sqrt{5}$

$(6-k)^2=5\sqrt{2}$

$-k=-6\pm5\sqrt{2}$ $\quad k=6\pm5\sqrt{2}$

kは第1象限より $k=6+5\sqrt{2}$ が最大値

最小値は原点 $(0,0)$ を通るとき.

よって $3\cdot0+0+6=k$ $\quad k=6$.

最大値 $6+5\sqrt{2}$, 最小値 6