1/2

ベクトル63

ぬけ

いらない

$|\overrightarrow{OA}|=1$ ぬけている

空間内に, 同一平面上にない相異なる4点O, A, B, Cがある。$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$は互いに直交し, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $|\overrightarrow{OC}|=3$である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$と表すとき, 次の各問に答えよ。

(1) 線分BCを$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点をKとし, $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$と表す。このとき, 内積$\vec{a}\cdot\vec{k}$を求めよ。また, $\vec{k}$の大きさ$|\vec{k}|$をtを用いて表せ。

(2) 三角形OAKで, OからAKに引いた垂線の足をHとする。このとき, AH : HKを$|\vec{a}|, |\vec{k}|$を用いてできるだけ簡単に表せ。

(3) $\overrightarrow{OH}$を$t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて,

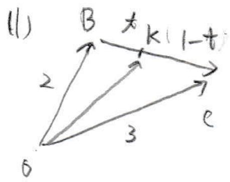
$$\overrightarrow{OH}=\frac{(\boxed{})\vec{a}+(\boxed{})\vec{b}+\boxed{}\vec{c}}{\boxed{}}$$

の形に表せ。空欄にあてはまる式を求めよ。

(4) $\overrightarrow{OH}$が3点A, B, Cの作る平面に垂直であるとき, tの値を求めよ。

〔早稲田大〕

(1)



$\vec{k}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{k}=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$ より $\underline{\vec{a}\cdot\vec{k}=0}$

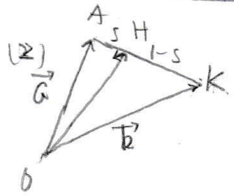
$|\vec{k}|^2=|(1-t)\vec{b}+t\vec{c}|^2=(1-t)^2|\vec{b}|^2+2t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2$

$=4(1-t)^2+9t^2$

$=13t^2-8t+4$

$\therefore$ $\underline{|\vec{k}|=\sqrt{13t^2-8t+4}}$

(2)



$\overrightarrow{OH}=(1-s)\vec{a}+s\vec{k}$

$\overrightarrow{AK}=\vec{k}-\vec{a}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AK}$ より $((1-s)\vec{a}+s\vec{k})\cdot(\vec{k}-\vec{a})=0$

$(1-s)\vec{a}\cdot\vec{k}+s|\vec{k}|^2-(1-s)|\vec{a}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{k}=0$

$s|k|^2-(1-s)|\vec{a}|^2=0$ $\therefore$ $s(|k|^2+|\vec{a}|^2)=|\vec{a}|^2$ より $s=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{k}|^2}$

$\therefore$ $1-s=\dfrac{|\vec{k}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{k}|^2}$ ゆえに $AH:HK=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{k}|^2}:\dfrac{|\vec{k}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{k}|^2}$ $\underline{AH:HK=|\vec{a}|^2:|\vec{k}|^2}$

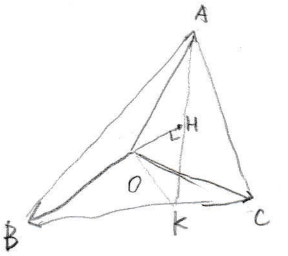
(3)

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{|\vec{k}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{k}|^2}\vec{a}+\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{k}|^2}\vec{k}$

$=\dfrac{13t^2-8t+4}{13t^2-8t+5}\vec{a}+\dfrac{1}{13t^2-8t+5}\vec{k}=\dfrac{13t^2-8t+4}{13t^2-8t+5}\vec{a}+\dfrac{1}{13t^2-8t+5}(t\vec{c}+(1-t)\vec{b})$

$$\overrightarrow{OH}=\frac{(13t^2-8t+4)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}}{13t^2-8t+5}$$

OH ⊥ 平面ABC



$\vec{OH}\perp\vec{AK}$ より あと1本 $\vec{OH}$と垂直がいえればよい

$\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ より　$\vec{OH}\perp\vec{AB}$ として

(3)の分子との積は

$$((13t^2-8t+4)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c})(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\cancel{(13t^2-8t+4)\vec{a}\cdot\vec{b}}+(1-t)|\vec{b}|^2+\cancel{t\,\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

$$-(13t^2-8t+4)|\vec{a}|^2-\cancel{(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}}-\cancel{t\,\vec{a}\cdot\vec{c}}=0$$

$$4(1-t)-13t^2+8t-4=0$$

$$\cancel{4}-4t-13t^2+8t-\cancel{4}=0$$

$$13t^2-4t=0$$

$$t(13t-4)=0$$

$t\neq0$ として $\underline{t=\dfrac{4}{13}}$