ベクトル6#65

OK

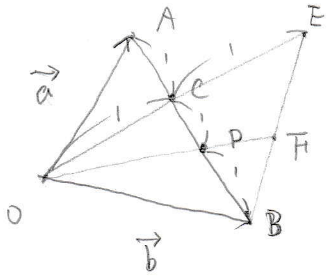
一直線上にない3点 O, A, B がある。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。線分 AB を3等分した点を, 点 A に近い方から C, D とする。また, 点 E, F を $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF} = l\overrightarrow{OD}$ を満たすものとする。

(1) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 点 F が線分 BE 上にあるとき, l の値を求めよ。

(3) (2) のとき面積比 $\triangle EOF : \triangle BDF$ を求めよ。

〔東北学院大〕



(1) $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OC}$ より

$\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$ であるから

$\overrightarrow{OE} = \dfrac{4}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$ //

(2) メネラウスの定理より $\dfrac{1}{1} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{EF}{FB} = 1$ $\dfrac{EF}{FB} = \dfrac{2}{1}$ であるから $\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OE} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

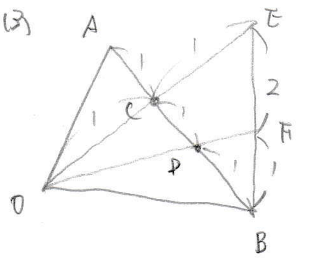
(1) より

$\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}\right) + \dfrac{2}{3}\vec{b}$ となるので整理して

$\overrightarrow{OF} = \dfrac{4}{9}\vec{a} + \dfrac{8}{9}\vec{b}$ $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$ であるから

$\overrightarrow{OF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OD}$ $\therefore\ l = \dfrac{4}{3}$ //

(3)



$\triangle OBE$ の面積を S とすると

$\triangle EOF = \dfrac{2}{3}S$

$\triangle BDF = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 \times 1}{3 \times 2} \times S = \dfrac{1}{12}S$

$\therefore\ \triangle EOF : \triangle BDF = \dfrac{2}{3}S : \dfrac{1}{12}S = 8 : 1$

$\triangle EOF : \triangle BDF = 8 : 1$ //