ベクトル ~~65~~ 66

66

三角形 OAB があり, OA=AB=4, OB=3 である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

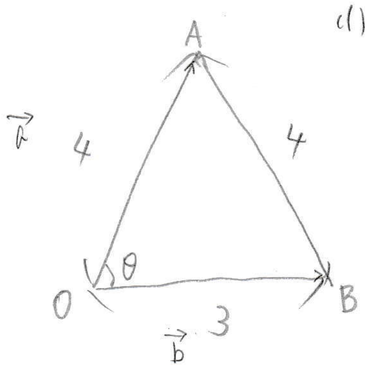
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{}$ である。

(2) ∠O の 2 等分線と辺 AB の交点を M とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せば, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{b}$ である。

(3) B から辺 OA に垂線 BN を下ろすとき, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$ を用いて表すと, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\boxed{}\vec{a}$ である。

(4) 直線 OM と直線 BN の交点を R とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{b}$ である。

〔北里大〕

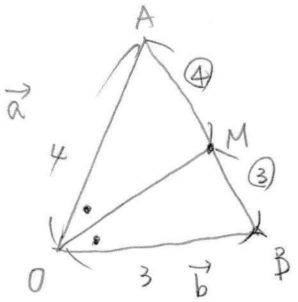


(1) △OABは二等辺三角形より ∠AOB=θとすると

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{OB}}{4}=\frac{3}{8}$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=4\cdot3\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{2}$$

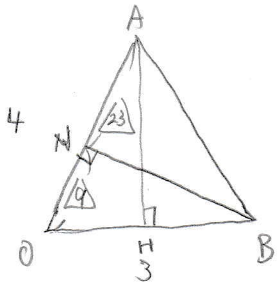
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9}{2}$$



(2)

AM : MB = 4 : 3 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$$



(3) △OABの面積を考えるとき OBを底辺とすると 頂点AからOBに垂した垂線AHが高さになる

AHは三平方の定理より $\mathrm{AH}=\sqrt{16-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{55}}{2}$

このとき

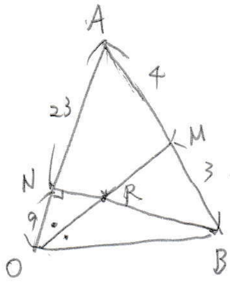
OA × BN = OB × AH であるから

$4\times\mathrm{BN}=3\times\frac{\sqrt{55}}{2}$ 　$\mathrm{BN}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$ となり これより $\mathrm{ON}=\sqrt{9-\left(\frac{3\sqrt{55}}{8}\right)^2}=\frac{9}{8}$

従って $\mathrm{AN}=4-\frac{9}{8}=\frac{23}{8}$ となり ON : AN = 9 : 23 …①

①より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{9}{32}\vec{a}$$



(4) メネラウスの定理より

$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RM}}\times\frac{3}{7}\times\frac{23}{9}=1$ 　$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RM}}=\frac{21}{23}$ となるので $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{21}{44}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ これと(2)の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{9}{44}\vec{a}+\frac{3}{11}\vec{b}$$