ベクトル68

ok

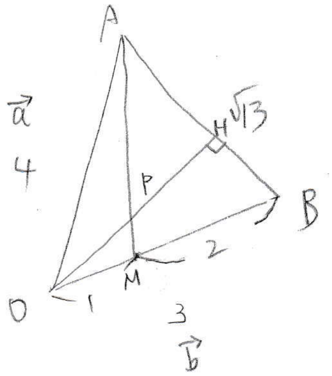
△OABにおいて, OA=4, OB=3, AB= $\sqrt{13}$ とする。頂点Oから辺ABに垂線OHを下ろす。また, 辺OBを1 : 2に内分する点をMとし, 線分OHと線分AMの交点をPとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, 次の各問に答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさを求めよ。

〔成蹊大〕



(1) △OABで∠AOB=θとして余弦定理を用いると

$(\sqrt{13})^2 = 4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cdot\cos\theta$

$13 = 16+9-24\cos\theta$

$24\cos\theta = 12$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 4\cdot3\cdot\frac{1}{2} = 6$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 6$

(2) BH=xとおくと, AH= $\sqrt{13}-x$ となり

△OHBと△OHAでそれぞれxを用いてOH²を表すと

$OH^2 = 9-x^2$, $OH^2 = 16-(\sqrt{13}-x)^2$ から

$9-x^2 = 16-(\sqrt{13}-x)^2$

$9-x^2 = 16-13+2\sqrt{13}x-x^2$

$2\sqrt{13}x = 6$ $x = \frac{3\sqrt{13}}{13} = BH$ ゆえに $AH = \frac{10}{13}\sqrt{13}$ であるから BH:AH=3:10.

これからメネラウスの定理により

$\frac{AP}{PM}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{10} = 1$ であるから AP:PM=10:1 となるので

$\overrightarrow{OP} = \frac{10}{11}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{11}\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ であるから $\overrightarrow{OP} = \frac{10}{33}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{11}\overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{1}{11}\vec{a} + \frac{10}{33}\vec{b}$

(3) $|\overrightarrow{OP}|^2 = \left(\frac{1}{11}\right)^2|\vec{a}|^2 + \frac{2\cdot1\cdot10}{11\cdot33}\vec{a}\cdot\vec{b} + \left(\frac{10}{33}\right)^2|\vec{b}|^2$

$= \left(\frac{1}{11}\right)^2\left\{4^2 + \frac{20}{3}\cdot6 + \left(\frac{10}{3}\right)^2\cdot3^2\right\} = \left(\frac{1}{11}\right)^2\cdot156$

$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \frac{2\sqrt{39}}{11}$