ベクトル 69

ok

空間上の2つのベクトルを $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(t,0,2)$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる t の値を求めよ。

(2) $t=1$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

〔成城大〕

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$　$|\vec{b}|=\sqrt{t^2+4}$ より ベクトルの内積の公式から

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$t=\sqrt{2(t^2+4)}\cdot\dfrac{1}{2}$ となり $t>0$ と分かる

$2t=\sqrt{2(t^2+4)}$ として両辺2乗すると

$4t^2=2(t^2+4)$

$2t^2=8$　$t=\pm 2$　$t>0$ より

$t=2$

(2) $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(1,0,2)$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ に垂直なベクトルを $\vec{p}=(\alpha,\beta,\gamma)$ とすると

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ …①

内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$, $\vec{b}\cdot\vec{p}$ はともに0なので

$\alpha+\beta=0$ …②

$\alpha+2\gamma=0$ …③

②より $\beta=-\alpha$ ③より $\gamma=-\dfrac{\alpha}{2}$ として①に代入すると

$\alpha^2+(-\alpha)^2+\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=1$

$\dfrac{9}{4}\alpha^2=1$　$\alpha^2=\dfrac{4}{9}$　$\therefore \alpha=\pm\dfrac{2}{3}$

$\alpha=\dfrac{2}{3}$ のとき $\beta=-\dfrac{2}{3}$, $\gamma=-\dfrac{1}{3}$

$\alpha=-\dfrac{2}{3}$ のとき $\beta=\dfrac{2}{3}$, $\gamma=\dfrac{1}{3}$

よって求める単位ベクトルは $\left(\pm\dfrac{2}{3}, \mp\dfrac{2}{3}, \mp\dfrac{1}{3}\right)$ (∵複号同順)