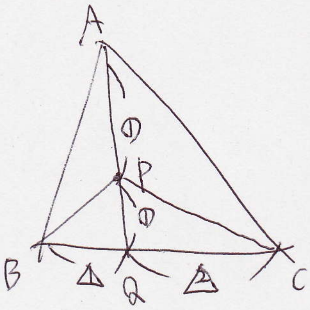
7

△ABC の内部に点 P をとり,

$$3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

ならしめるとき, △BPC, △CPA, △APB の面積比を求めよ。　〔福岡大〕



$3\overrightarrow{AP} = 2(-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}$

$= -2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}$ より

$6\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ となり

これを変形すると

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ …①

解　直線 AP と BC の交点を Q とすると ①より

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ であり　Q は辺 BC を 1:2 に内分する.

また P は線分 AQ を 1:1 に内分することが分かる.

これより △ABC の面積を S とすると

$\triangle BPC = \frac{1}{2}S$

$\triangle CPA = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{3}S$

$\triangle APB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$

よって求める比は

$\frac{1}{2}S : \frac{1}{3}S : \frac{1}{6}S$ となり

3 : 2 : 1 である.