

10/11/10

ok

大きさ3の空間ベクトル \vec{p} は $\vec{q} = (1, 1, 0)$ と 45° の角をなし、 $\vec{r} = (0, 1, 1)$ とともに 45° の角をなす。このとき \vec{p} を求めよ。 [東京女子大]

$$\vec{p} = (a, b, c) \text{ とおくと}$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{2}, |\vec{r}| = \sqrt{2}, |\vec{p}| = 3 \text{ であり}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 \text{ である}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos 45^\circ \text{ であるから上の条件より}$$

$$a + b = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

同様に

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = |\vec{p}| |\vec{r}| \cos 45^\circ \text{ であるから}$$

$$b + c = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore b + c = 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

②より $a = 3 - b$ ③より $c = 3 - b$ としこれらを①に代入すると

$$(3-b)^2 + b^2 + (3-b)^2 = 9$$

$$9 - 6b + b^2 + b^2 + 9 - 6b + b^2 = 9$$

$$3b^2 - 12b + 9 = 0$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$(b-1)(b-3) = 0 \quad \therefore b = 1, 3$$

$$b = 1 \text{ ならば } a = c = 2$$

$$b = 3 \text{ ならば } a = c = 0$$

$$\therefore \vec{p} = (2, 1, 2), (0, 3, 0) \text{ となり}$$