ベクトル 71

OK

空間内に 3 点 A(5, 5, 6), B(6, 4, 6), C(6, 7, 7) がある。

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{}$

(2) $\angle BAC = \theta$ とおくと, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ である。

(3) 四角形ABCDが平行四辺形になるような点Dの座標は $\left(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}\right)$ である。また, この平行四辺形 ABCD の面積は $\boxed{}$ である。

〔日本大〕

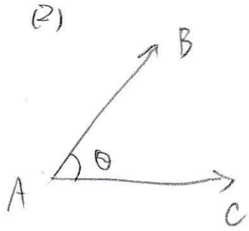
(1)

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (1, 2, 1)$ となる　よって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$

(2)



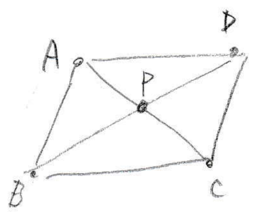
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

ベクトルの内積の公式より　$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\theta$ であるから

$-1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cos\theta$ より　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{12}}$　$\therefore$ $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(3)



Pの座標は

$\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BC} = (0, 3, 1)$, $\overrightarrow{BA} = (-1, 1, 0)$ より　$\overrightarrow{BP} = \left(-\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{BD} = 2 \cdot \overrightarrow{BP}$ より　$\overrightarrow{BD} = (-1, 4, 1)$

B(6, 4, 6) であるから　D(5, 8, 7)

(2)より $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ であるから　$\sin^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$　$\sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{11}{12}}$　$0 < \theta < 180$ より

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$　よって △ABCの面積 S は　$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$ より

$S = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\dfrac{11}{12}} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

平行四辺形ABCDの面積は 2S であるから、求める面積は $\sqrt{11}$

$\sqrt{11}$