ベクトル75

四面体 OABC において, 辺 AB を $m:n$ の比に内分する点を P, 線分 PC の中点を Q, 線分 OQ の中点を R とする。また, 直線 AR と面 OBC との交点を S とし, 直線 OS と辺 BC との交点を T とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

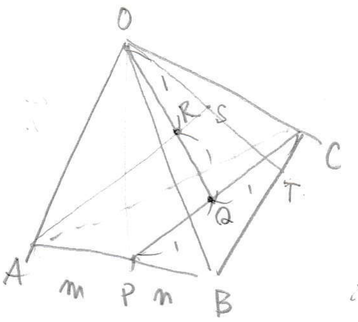
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を m, n を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ と m, n を用いて表せ。

(3) $\mathrm{BT}:\mathrm{TC}=3:2$ のとき, $m:n$ の比を求めよ。

〔秋田大〕

(1)



$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$ …①

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ …②

$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$ これと②より

$\overrightarrow{OQ} = \frac{n}{2(m+n)}\vec{a} + \frac{m}{2(m+n)}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ ①から

$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{n}{4(m+n)}\vec{a} + \frac{m}{4(m+n)}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

(2)

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS}$ 　 $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OR} - \vec{a}$ で $\overrightarrow{RS}$ と $\overrightarrow{AR}$ は

$\overrightarrow{RS} = k\overrightarrow{AR}$ とかける. $\therefore \overrightarrow{RS} = k\cdot\overrightarrow{OR} - k\cdot\vec{a}$

したがって $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + k\cdot\overrightarrow{OR} - k\cdot\vec{a} = (1+k)\overrightarrow{OR} - k\vec{a}$

これと(1)より $\overrightarrow{OS} = \frac{(1+k)n}{4(m+n)}\vec{a} + \frac{(1+k)m}{4(m+n)}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} - k\vec{a}$

$= \frac{-k(4m+3n)+n}{4(m+n)}\vec{a} + \frac{(1+k)m}{4(m+n)}\vec{b} + \frac{1}{4}(1+k)\vec{c}$

このとき $\vec{a}$ の係数が0となるとよいので

$k = \frac{n}{4m+3n}$ これを①に代入して $\overrightarrow{OS} = \frac{\left(\frac{4m+3n}{4m+3n} + \frac{n}{4m+3n}\right)m}{4(m+n)}\vec{b} + \frac{1}{4}\left(1+\frac{n}{4m+3n}\right)\vec{c}$ となり

$\overrightarrow{OS} = \frac{m}{4m+3n}\vec{b} + \frac{m+n}{4m+3n}\vec{c}$

(3) (2)を変形すると

$\overrightarrow{OS} = \frac{2m+n}{4m+3n}\left(\frac{m}{2m+n}\vec{b} + \frac{m+n}{2m+n}\vec{c}\right)$ つまり T は辺BC を $m+n:m$ に内分する。つまり $m+n:m=3:2$ であるから

$m=2,\ n=1$ 　 $\therefore m:n = 2:1$