ベクトル76

aを正の数とする。△ABCの辺BCを$a:1$の比に内分する点をDとし, 線分AD上にA, Dと異なる点Eをとる。直線BEと辺ACとの交点をFとする。BE : EF$=b:1$とおくとき, 次の問いに答えよ。

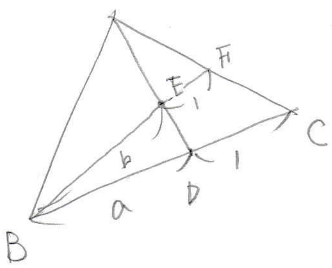
(1) AE : ED, AF : FCをそれぞれaとbを用いて表せ。

(2) 点EがAE : ED$=1:a$をみたすとき, AF : FCをaを用いて表せ。

(3) 点Eが$\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{CE}=\vec{0}$を満たすとき, aとbの値をそれぞれ求めよ。

〔秋田大〕

(1)



メネラウスの定理

$$\frac{a}{1}\times\frac{AC}{AF}\times\frac{1}{b}=1 \text{ より } \frac{AC}{AF}=\frac{b}{a}$$

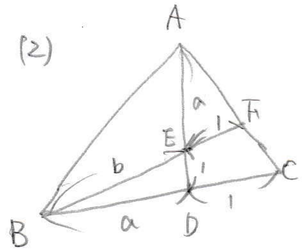
$$FC=AC-AF=b-a$$

$$\therefore AF:FC=a:b-a$$

$$\frac{AE}{ED}\times\frac{a}{a+1}\times\frac{b-a}{a}=1 \text{ より } \frac{AE}{ED}=\frac{a+1}{b-a}$$

$$\therefore AE:ED=a+1:b-a$$

(2)

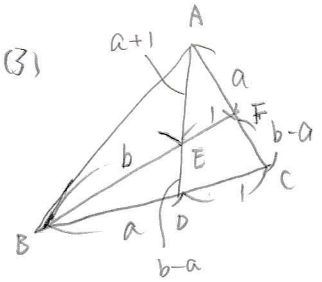


同様にメネラウスの定理

$$\frac{a}{1}\times\frac{a}{a+1}\times\frac{FC}{AF}=1$$

$$\therefore \frac{FC}{AF}=\frac{a+1}{a^2} \qquad \therefore AF:FC=a^2:a+1$$

(3)



$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b+1}\overrightarrow{AC} \quad \cdots①$$

$$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b+1}\overrightarrow{AC}=\frac{-b}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b+1}\overrightarrow{AC} \quad \cdots②$$

$$\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b+1}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a-b-1}{b+1}\overrightarrow{AC} \quad \cdots③$$

①,②,③と問題から

$$\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b+1}\overrightarrow{AC}+\frac{-2b}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{2a}{b+1}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{3a-3b-3}{b+1}\overrightarrow{AC}=0 \quad (\because b\neq -1)$$

$$\frac{-2b+4}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{6a-3b-3}{b+1}\overrightarrow{AC}=0 \quad (\because b\neq -1)$$

これより

$-2b+4=0 \qquad b=2$

$6a-3b-3=0$ と $b=2$ より

$a=\frac{3}{2}$

$$\therefore a=\frac{3}{2},\ b=2$$