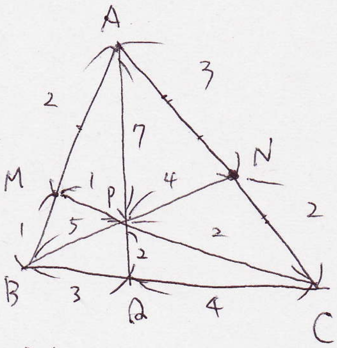
△ABC において線分 AB を 2 : 1 に内分する点を M とし, 線分 AC を 3 : 2 に内分する点を N とする。また, 2 つの線分 CM と BN との交点を P とし, 直線 AP と辺 BC との交点を Q とする。このとき

(1) ベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表わせ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表わせ。

(3) 面積の比 △ABP : △BCP : △CAP を求めよ。

〔横浜国大〕



メネラウスの定理より

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{MP}{PC}=1$ より $\frac{MP}{PC}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{NP}{PB}=1$ より $\frac{NP}{PB}=\frac{4}{5}$

チェバの定理より

$\frac{2}{1}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{2}{3}=1$ より $\frac{BQ}{QC}=\frac{3}{4}$

メネラウスの定理より

$\frac{2}{1}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{PQ}{AP}=1$ より $\frac{PQ}{AP}=\frac{2}{7}$

(1) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ より $\overrightarrow{AP}=\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{9}$

(2) $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{7}$

(3) △ABCの面積をSとすると求める比は

$\triangle ABP=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{9}S=\frac{1}{3}S$

$\triangle BCP=\frac{2}{9}S$

$\triangle CAP=\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{9}S=\frac{4}{9}S$

より

$\frac{1}{3}S:\frac{2}{9}S:\frac{4}{9}S$ となり $\underline{3:2:4}$ となる