ベクトル 80

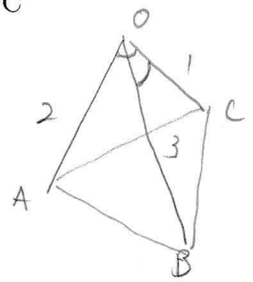
OK

$< AOC$

空間内に四面体OABCがあり

$$OA = 2,\ OB = 3,\ OC = 1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 5,\ \angle AOC = \angle BOC$$

であるという。ただし, 記号・は内積を表す。
$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \cos AOC = t$ とおく。




(1) 三角形OABの面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sqrt{\boxed{ウエ}}$ である。

(2) ベクトル $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}$ が, $\vec{a},\ \vec{b}$ の両方に垂直であるような実数 $x, y$ の値を $t$ を用いて表すと

$$x = -\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}t,\ y = -\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}t$$

である。このとき

$$\vec{p}\cdot\vec{c} = -\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}t^2 + \boxed{ソ}$$

となる。

(3) 四面体OABCの体積 $V$ を $t$ を用いて表すと

$$V = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\sqrt{\boxed{ツテ} - \boxed{トナ}t^2}$$

となる。

〔東京理科大〕

(1)
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$
$5 = 2\cdot 3\cos\theta$
$\cos\theta = \frac{5}{6}$ より $\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}$ ∵ $0 < \theta < 180$
$\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$
$\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$
$\frac{1}{2}\sqrt{11}$ アイウエ

(2) $(x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{0}$
$x|\vec{a}|^2 + y\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$
$4x + 5y + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ …①

$(x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b} = \vec{0}$ より
$x\vec{a}\cdot\vec{b} + y|\vec{b}|^2 + \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{0}$ 　$5x + 9y + \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ …② 　$\vec{a}\cdot\vec{c} = 2\cdot 1\cdot\cos\angle AOC = 2t$

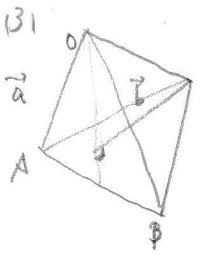
$\vec{b}\cdot\vec{c} = 3\cdot 1\cos\angle BOC = 3t$ (∵ $\cos\angle AOC = \cos\angle BOC = t$) であるから, ①, ②の式は

$\begin{cases} 4x+5y = -2t \\ 5x+9y = -3t \end{cases}$ これを解いて $x = -\frac{3}{11}t,\ y = -\frac{2}{11}t$ オカキクケコ

$\vec{p} = -\frac{3}{11}t\vec{a} - \frac{2}{11}t\vec{b} + \vec{c}$ より $\vec{p}\cdot\vec{c} = -\frac{3}{11}t\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{2}{11}t\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = -\frac{6}{11}t^2 - \frac{6}{11}t^2 + 1$

∴ $\vec{p}\cdot\vec{c} = -\frac{12}{11}t^2 + 1$ サシスセソ

(3)




$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot|\vec{p}|$ で,

$|\vec{p}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} = \vec{p}\cdot\left(-\frac{3}{11}t\vec{a} - \frac{2}{11}t\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{p}\cdot\vec{c}$
$= -\frac{12}{11}t^2 + 1$ ∴ $|\vec{p}| = \sqrt{\frac{11-12t^2}{11}}$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{36-25}$ 　∴ $\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{11}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{11}1$

数樂 http://www.mathtext.info/

以上より $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{11}\cdot\sqrt{\frac{11-12t^2}{11}}$ 　$V = \frac{1}{6}\sqrt{11-12t^2}$ タチツテトナ