ベクトル82

O を原点とする xyz 空間に, 4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体がある。辺 AB の中点を D とし, 線分 CD を 1 : 2 に内分する点を E, 線分 OE の中点を F とする。また直線 AF と平面 OBC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

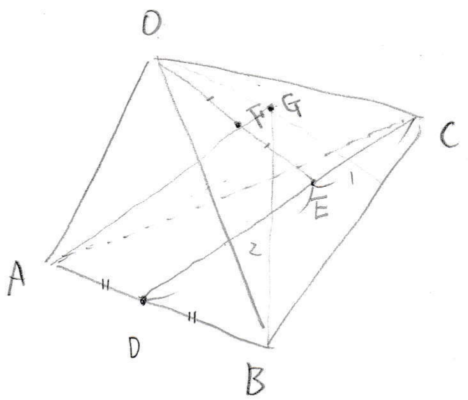
(3) $\vec{a} = (4, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, 1, -4)$, $\vec{c} = (2, -3, 1)$ のとき, 次の内積を求めよ。

 (a) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GO}}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}$

(4) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を (3) で与えたベクトルとする。このとき, 四面体 OABG の体積 V を求めよ。

〔東京農工大〕

(1) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ …①



$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ∵ $\overrightarrow{AC} = (\vec{c} - \vec{a})$ $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

$= \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a}) + \frac{1}{6}(\vec{b} - \vec{a})$

$= -\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ …②

①, ②より

$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$\underline{\overrightarrow{AF} = -\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AF}$ であり $\overrightarrow{OG} = \vec{a} + k\overrightarrow{AF} = \vec{a} + k\left(-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$\overrightarrow{OG} = \left(1 - \frac{11}{12}k\right)\vec{a} + \frac{1}{12}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}$ G は平面 OBC 上にある点だから

$1 - \frac{11}{12}k = 0$ より $k = \frac{12}{11}$ よって $\underline{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{11}\vec{b} + \frac{4}{11}\vec{c}}$

(3)

(a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{11}(3, 1, -4) + \frac{4}{11}(2, -3, 1) = (1, -1, 0)$

$\overrightarrow{GA} = (4, 2, 3) - (1, -1, 0) = (3, 3, 3)$ ∴ $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GO} = (3, 3, 3)(-1, 1, 0) = 0$.

(b) $\overrightarrow{GB} = (3, 1, -4) - (1, -1, 0) = (2, 2, -4)$ $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = (3, 3, 3)(2, 2, -4) = 0$

(4)

底辺を △OAG とすると高さは BG となる $|\overrightarrow{BG}| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$ …①

∠OGA = 90° より △OAG $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{OG}|$

$|\overrightarrow{AG}| = 3\sqrt{3}$ $\overrightarrow{OG} = \sqrt{2}$ であるから …②

①, ②より 求める体積 V は $V = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{3} = 6$ $\underline{V = 6}$