

210
171184

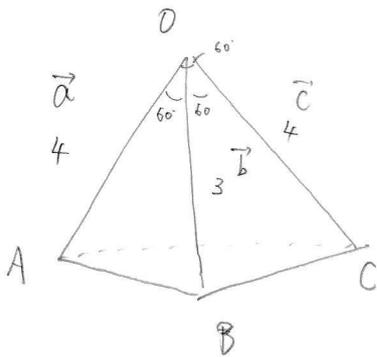
四面体 OABC において

$$OA=OC=4, OB=3, \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$$

とする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ を求めよ。
- (2) 平面 ABC 上の点 D を、直線 OD が平面 ABC に垂直に交わるようにとる。 $\vec{OD} = \vec{OA} + p\vec{AB} + q\vec{AC}$ とおくと、p と q の値を求めよ。
- (3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

[宮崎大]



$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ = \vec{bc} - \vec{ab} - \vec{ac} + |\vec{a}|^2 \dots \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ |\vec{AB}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{ab} + |\vec{a}|^2 = 9 - 12 + 16 = 13 \\ |\vec{AC}|^2 &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{ac} + |\vec{a}|^2 = 16 - 16 + 16 = 16 \\ \Delta ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{13 \cdot 16 - 8^2} = 6 \quad \text{②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{bc} &= 3 \cdot 4 \cos 60^\circ = 6 \\ \vec{ab} &= 4 \cdot 3 \cos 60^\circ = 6 \\ \vec{ac} &= 4 \cdot 4 \cos 60^\circ = 8 \quad \text{③} \\ 6 - 6 - 8 + 16 &= 8 \quad \therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \vec{OA} + p\vec{AB} + q\vec{AC} = \vec{a} + p(\vec{b} - \vec{a}) + q(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= (1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OD} \perp \vec{AB} \quad \{ (1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c} \} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= (1-p-q)\vec{ab} + p|\vec{b}|^2 + q\vec{bc} \\ &\quad - (1-p-q)|\vec{a}|^2 - p\vec{ab} - q\vec{ac} \\ &= 6(1-p-q) + 9p - 6q - 16(1-p-q) - 6p - 8q \\ &= 6 - 6p - 6q + 9p + 6q - 16 + 16p + 16q - 6p - 8q \\ &= 13p - 8q - 10 = 0 \dots \text{④} \end{aligned}$$

$\vec{OD} \perp \vec{AC}$

$$\begin{aligned} \{ (1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c} \} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ = (1-p-q)\vec{ac} + p\vec{bc} + q|\vec{c}|^2 - (1-p-q)|\vec{a}|^2 - p\vec{ab} - q\vec{ac} \\ = 8 - 8p - 8q + 6p + 16q - 16 + 16p + 16q - 6p - 8q \\ = 8p + 16q - 8 = 0 \dots \text{⑤} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 13p + 8q = 10 \\ 8p + 16q = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13p + 8q = 10 \\ 4p + 8q = 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} p &= \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + 8q &= 10 \\ 8q &= \frac{4}{3} \\ q &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(3) (2)より $\vec{OD} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

$$|\vec{OD}|^2 = \frac{1}{36} (\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c})^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{36} (|\vec{a}|^2 + 8\vec{ab} + 16|\vec{b}|^2 + 2\vec{c}(\vec{a} + 4\vec{b}) + |\vec{c}|^2) = \frac{1}{36} (16 + 48 + 144 + 16 + 48 + 16) = 8 \quad \therefore |\vec{OD}| = 2\sqrt{2} \\ \text{体積 } V &= \frac{1}{3} \Delta ABC \cdot OD = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

1

数楽 <http://www.mathtext.info/>

$$p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{6}$$