空間
ベクトル85

四面体OABCにおいて，OA⊥OB, OA=3, OB=4, OC=5とする。△OABの重心をGとし，直線CGは△OABを含む平面に垂直とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。次の各問いに答えよ。

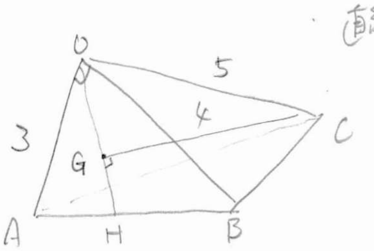
(1) $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$用いて表せ。

(2) 内積$\vec{a}\cdot\vec{c}$および$\vec{b}\cdot\vec{c}$を求めよ。

(3) 四面体OABCの体積を求めよ。

〔新潟大〕

・直線OGとABの交点をHとする



(1) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OH}$

$= -\vec{c} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$　　∴ $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$

(2) $\overrightarrow{CG}\perp$ 平面OABなので

$\overrightarrow{CG}\perp\vec{a}$ より　$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$\frac{1}{3}(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c})=0$　　ここで $\vec{a}\perp\vec{b}$ なので $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\frac{1}{3}(9-3\vec{a}\cdot\vec{c})=0$　　$3\vec{a}\cdot\vec{c}=9$　　∴ $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$

同様に

$\overrightarrow{CG}\perp\vec{b}$ より　$\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c})=0$　　$\frac{1}{3}(16-3\vec{b}\cdot\vec{c})=0$

$16-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　∴ $\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{16}{3}$

(3) $|\overrightarrow{CG}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+2\overset{0}{\vec{a}\cdot\vec{b}}+|\vec{b}|^2-6\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})+9|\vec{c}|^2)$

$=\frac{1}{9}(9+16-6\cdot3-6\cdot\frac{16}{3}+9\cdot25)$

$=\frac{1}{9}(25-18-32+225)=\frac{200}{9}$　　$|\overrightarrow{CG}|=\frac{10\sqrt{2}}{3}$

求める体積をVとすると

$V=\cancel{3}\times\overset{2}{\cancel{4}}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{10\sqrt{2}}{\cancel{3}}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　　$\frac{20\sqrt{2}}{3}$