ベクトル86

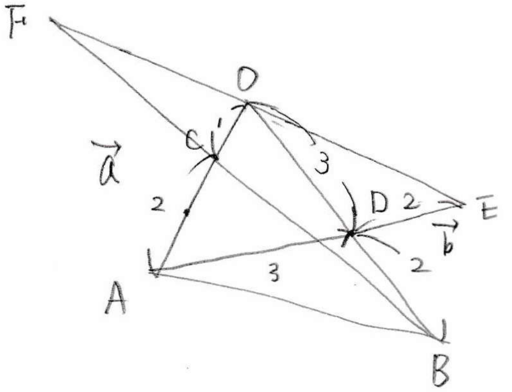
△OABの辺OAを1：2に内分する点をC, 辺OBを3：2に内分する点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を満たす点をEとし, 直線OEと直線BCとの交点をFとする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく, このとき, 次の問いに答えよ。とおく。次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。

(3) FC : CBを求めよ。

〔香川大〕



(1) $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$

$=\vec{a}+\frac{5}{3}\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\vec{a}+\frac{5}{3}\left(-\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)$

$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$　　∴ $\overrightarrow{OE}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OE}=-\frac{2}{3}k\vec{a}+k\vec{b}$ …①

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{BC}=\vec{b}+l\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)$　$\overrightarrow{BO}=-\vec{b}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ より

$=\vec{b}+l\left\{-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})\right\}=\frac{1}{3}l\vec{a}+(1-l)\vec{b}$ …②

①,②は同値なので $-\frac{2}{3}k=\frac{1}{3}l$, $k=1-l$ より $l=-2k$

$k=1+2k$　$k=-1$, $l=2$

∴ $\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$　　$\overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$

(3) (2)より $l=2$であるから $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}$ となり $\overrightarrow{BC}$の2倍が$\overrightarrow{BF}$なので

BC : BF = 1 : 2 つまりCはBFの中点となるので FC : CB = 1 : 1