ベクトル87

直線 $l:(x,y,z)=(5,0,0)+s(1,-1,0)$ 上に点 $\mathrm{P_0}$, 直線 $m:(x,y,z)=(0,0,2)+t(1,0,2)$ 上に点 $\mathrm{Q_0}$ があり, $\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,-1,0)$ と $(1,0,2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{Q_0}$ の座標を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3) 直線 l 上の点 P, 直線 m 上の点 Q について, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$, $\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$, $\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{QQ_0}}|^2+16$ であることを示せ。

〔金沢大〕

(1) l上の点を $P_0(5+s,\ -s,\ 0)$

m上の点を $Q_0(t,\ 0,\ 2+2t)$

$\overrightarrow{P_0Q_0}=(t-(5+s),\ 0-(-s),\ 2+2t-0)=(t-s-5,\ s,\ 2+2t)$

これが $(1,-1,0)$, $(1,0,2)$ と垂直なので

$(t-s-5)\cdot1+s\cdot(-1)=0 \rightarrow t-2s=5$

$(t-s-5)\cdot1+(2+2t)\cdot2=0 \rightarrow 5t-s=1$

これを連立方程式で解くと

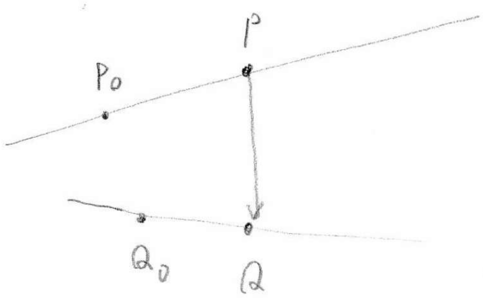
$s=-\frac{8}{3},\ t=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ P_0\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3},0\right),\ Q_0\left(-\frac{1}{3},0,\frac{4}{3}\right)$

(2) $\overrightarrow{P_0Q_0}=\left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$ $\therefore$ $|\overrightarrow{P_0Q_0}|=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}=4$

$|\overrightarrow{P_0Q_0}|=4$

(3)



$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{P_0Q_0}+\overrightarrow{Q_0Q}$ …①

①より右辺を並べかえて2乗すると

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q}|^2+2\overrightarrow{P_0Q_0}(\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q})+|\overrightarrow{P_0Q_0}|^2$ …②

ここで $\overrightarrow{P_0Q_0}$ はベクトル $(1,-1,0)$, $(1,0,2)$ に垂直でかつ

$\overrightarrow{PP_0}\,/\!/\,(1,-1,0)$, $\overrightarrow{Q_0Q}\,/\!/\,(1,0,2)$ なので

2つの内積 $\overrightarrow{P_0Q}\cdot\overrightarrow{PP_0}$ と $\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\overrightarrow{Q_0Q}$ は0になる。よって②は

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PP_0}+\overrightarrow{Q_0Q}|^2+16$ となる